



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Fisica

Sulla completezza della Teoria Quantistica

Relatore:

Chiar.^{mo} Professor G. M. D'Ariano

Correlatore:

Chiar.^{mo} Professor P. Perinotti

Tesi di Laurea di
Marco Erba

Anno Accademico 2010/2011

Indice

I	3
1 Introduzione	4
1.1 Estendibilità della Teoria Quantistica	4
1.2 Potenziali estensioni della Teoria Quantistica	7
1.3 Approccio al problema	8
2 La misurazione quantistica	11
2.1 Descrizione dei sistemi quantistici	11
2.2 Tipologie di misurazione	13
2.3 La misurazione come <i>quantum operation</i>	15
II	18
3 Definizioni	19
3.1 Definizioni relative all'assunzione <i>FR</i>	19
3.2 Definizioni relative alle assunzioni <i>QM</i>	20
3.3 Definizioni relative al <i>Lemma 1</i>	21
4 Assunzioni e risultati preliminari	22
4.1 Ipotesi fisiche	22
4.2 Commenti ed osservazioni	23
4.3 Risultati matematici	23
III	28
5 Il teorema	29
5.1 Enunciato	29
5.2 Dimostrazione (stati massimamente <i>entangled</i>)	29
5.3 Dimostrazione (stati arbitrari)	30

6	Commenti conclusivi	32
6.1	Commenti sul teorema	32
6.2	La funzione d'onda alla luce del teorema	33
A	Calcolo di I_N per stati massimamente <i>entangled</i> a due livelli	34
B	Includere la funzione d'onda nel set delle proprietà fisiche di un sistema	38
	Bibliografia	40

Parte I

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Estendibilità della Teoria Quantistica

Il fine di questo lavoro è illustrare i risultati di un articolo (vd. [1]) di Renato Renner, professore all'*Institute for Theoretical Physics* (Zurigo, Svizzera) e Roger Colbeck, ricercatore al *Perimeter Institute for Theoretical Physics* (Waterloo, Canada).

Gli autori si interrogano circa l'*estendibilità* della Teoria Quantistica, ponendo la questione se essa sia o meno, nei limiti del proprio dominio di applicabilità, una teoria fisica massimamente informativa.

Questo aspetto della teoria coinvolge la sua *completezza*, problema che è stato per la prima volta affrontato nel celebre articolo [2] di Einstein, Podolsky e Rosen, in cui i tre fisici praticano la via del *Gedankenexperiment* (“esperimento mentale”) al fine di dare una sorta di dimostrazione per assurdo dell'incompletezza della teoria stessa.

Nell'articolo è introdotta una condizione sufficiente perché una proprietà dei sistemi fisici corrisponda ad un *elemento di realtà fisica*, ovvero che essa sia predicibile con certezza (cioè con probabilità unitaria) dalla teoria. È assunto altresì il ragionevole *principio di località o separazione*, che afferma che due sistemi fisici non possano interagire istantaneamente a distanza e che pertanto, una volta terminata l'interazione (“senza che il sistema sia perturbato in alcun modo”), l'uno evolva in maniera indipendente dall'altro. Quindi si dichiara quella che viene chiamata *condizione di completezza* per una teoria fisica:

“[...] qualunque significato di *completezza* si adotti, pare essere necessaria, perché una teoria sia *completa*, la seguente richiesta: *ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica.*”

Si può pensare a due particelle con *spin* $\frac{1}{2}$ prodotte, per esempio, dal decadimento di una particella a *spin* nullo; poiché lo *spin* deve conservarsi, le

due particelle avranno *spin* antiparallelo e potranno essere descritte (usando l'autobase di \hat{s}_z) dallo stato di singoletto:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B \right).$$

Se ora al sito A si misura s_z della prima particella, ottenendo per esempio l'autostato $|\uparrow\rangle_A$, tale misura permetterà di inferire lo stato della particella in B (*senza perturbarla*, come richiesto dall'ipotesi di *località*), ovvero $|\downarrow\rangle_B$. Alternativamente, in A si può misurare un'osservabile cui è associato un operatore che non commuta con \hat{s}_z , per esempio lo *spin* in direzione x . Rispetto all'autobase di \hat{s}_x , gli autostati di \hat{s}_z si scrivono

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow_x\rangle + |\downarrow_x\rangle \right),$$

$$|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow_x\rangle - |\downarrow_x\rangle \right)$$

(ciò si deriva operando un cambiamento di base sulla matrice di Pauli $\hat{\sigma}_z$). Si verifica con una semplice sostituzione che lo stato di singoletto scritto rispetto a questa nuova base è invariante in forma, cioè è

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow_x\rangle_A \otimes |\downarrow_x\rangle_B - |\downarrow_x\rangle_A \otimes |\uparrow_x\rangle_B \right).$$

Come nel caso di s_z , una misura di s_x è incerta (infatti $|\uparrow_x\rangle$ e $|\downarrow_x\rangle$ sono equiprobabili); eppure la seconda misura su A permette di determinare in quale autostato di \hat{s}_x si trovi B con probabilità unitaria: è perciò lecito ottenere al sito B due valori di s_x e s_z *simultaneamente* non affetti da incertezza, il che secondo la Teoria Quantistica sarebbe precluso dal *principio di indeterminazione di Heisenberg* (infatti $[\hat{s}_x, \hat{s}_z] \neq 0$).

L'esperimento mentale (detto anche *paradosso EPR*) fatto in [2] prendeva in considerazione *posizione* e *momento*, ma non vi è alcuna differenza concettuale.

La conclusione a cui arrivano gli autori è che si possano assegnare allo stesso sistema fisico (la particella in B) due diversi elementi di realtà, corrispondenti a due funzioni d'onda, una per ogni scelta della misurazione effettuata sul sistema A:

“siamo dunque costretti a concludere che la descrizione quantistica della realtà fisica data dalla funzione d'onda non è completa.”

Supporre che le misure si possano ricondurre a valori localmente presenti nei due siti di misurazione porta al “paradosso”: questa apparente incongruenza spinse Einstein a parlare di “*spooky action at a distance*” (“fantasmatica azione a distanza”).

Il principio che limita il ragionamento *EPR* prende il nome di *realismo locale*. Secondo questa visione, i sistemi fisici sarebbero dotati di proprietà preesistenti alla misurazione ed oggettive, modificabili solo localmente ed indipendenti dall'osservazione, o comunque da una perturbazione generica del sistema (senza necessariamente chiamare in causa il ruolo attivo di un osservatore).

L'errore metodologico di [2], pertanto, è di condurre il ragionamento sotto ipotesi fisiche troppo restrittive, sebbene considerate secondo il senso comune innocentemente ragionevoli e perlopiù scontate. Bisogna dire, peraltro, che la preoccupazione di Einstein era di tentare di non abbandonare lo statuto di esattezza ed oggettività "deterministica" della scienza.

In particolare, per ovviare al *paradosso EPR* bisogna necessariamente abbandonare o il *realismo* o il principio di *località* (si veda [3]).

Postulando, per i sistemi fisici, gradi di libertà 'nascosti' allo sperimentatore, si può tentare di recuperare il *determinismo* a patto di far venire meno la *località*.

Un primo tentativo di *teoria a variabili nascoste* è rappresentato dalla cosiddetta teoria di de Broglie-Bohm (vd. [5] e, per una discussione, [6]): si tratta di un'interpretazione della Meccanica Quantistica, detta anche *interpretazione causale*.

Il lavoro di Bohm ispirò Bell a costruire un impianto teorico e sperimentalmente falsificabile che potesse smentire o confermare le conclusioni tratte dall'argomentazione *EPR*; egli partì dall'assunzione dell'esistenza di variabili nascoste e locali, che possibilmente avrebbero potuto recuperare sia il *determinismo* sia la *località*.

Il risultato di Bell è il famoso teorema omonimo (che discende da una disuguaglianza formulata dallo stesso Bell nel suo articolo [4] del 1964): *non è possibile costruire una teoria a variabili nascoste locali che riproduca le predizioni quantistiche*. Il *teorema di Bell* ha poi dato seguito alla serie di disuguaglianze collettivamente conosciute come *disuguaglianze di Bell*.

Esse forniscono un *bound* per delle quantità sperimentalmente misurabili, nel caso sia verificata l'ipotesi fisica dell'esistenza di tali variabili *nascoste* e *deterministiche* in senso classico.

La violazione di queste disuguaglianze è stata sperimentalmente accertata, sebbene l'attuale tecnologia non permetta verifiche cosiddette *loophole-free* (letteralmente, "prive di scappatoie")¹.

Ad ogni modo, generalmente si ritiene che ciò sia dovuto semplicemente ad imperfezioni tecniche presto superabili, assumendo provata sperimentalmen-

¹L'efficienza quantica dei rivelatori di fotoni è ben al di sotto del valore ideale del 100%; ciò non permette di interpretare i risultati sperimentali a favore della violazione delle citate disuguaglianze con assoluta sicurezza, poiché rende possibile la creazione di modelli locali che le violino, riproducendo le correlazioni quantistiche.

te la violazione delle disuguaglianze (vd. [3]). Di conseguenza si è indotti a ritenere che la realtà, almeno all'emergere di comportamenti prettamente quantistici, abbia carattere intrinsecamente non locale.

1.2 Potenziali estensioni della Teoria Quantistica

Rimane aperta una domanda di portata più ampia: la Teoria Quantistica è *estendibile* da una *qualunque* teoria che la comprenda come caso particolare e che abbia una maggiore capacità predittiva?

Il proposito di Colbeck e Renner è di dare una risposta a questa domanda, senza richiedere che sia soddisfatto alcun vincolo particolare dalla potenziale teoria. Al contrario, si richiede proprio che tale estensione abbia carattere del tutto generale e comprenda teorie a variabili nascoste locali o nonlocali, deterministiche o non deterministiche.

Ipotetiche variabili nascoste, intese in senso classico, predirebbero, se accessibili allo sperimentatore, i risultati quantistici in maniera deterministica, eliminando l'aspetto probabilistico che appare intrinseco alla teoria.

Si può anche ipotizzare, d'altronde, un più generale “stato quantistico nascosto”: avendo accesso a questo, sarebbe teoricamente possibile migliorare le predizioni dell'attuale teoria quantistica, estendendola in modo tale che rimanga probabilistica. Questa possibilità è stata trattata da Leggett (vd. [7]).

Si può considerare un *toy model* come esempio istruttivo di “stato nascosto” dipendente da un parametro addizionale che, se ignorato, lascia inalterate le predizioni quantistiche.

Si consideri, a questo proposito, un tradizionale esperimento alla Stern-Gerlach. Un fascio di particelle a *spin* $\frac{1}{2}$ incide in un campo magnetico \mathbf{B} tale che

$$(\nabla\mathbf{B})_x \simeq 0, (\nabla\mathbf{B})_y \simeq 0, (\nabla\mathbf{B})_z \neq 0;$$

siano

$$\psi = |\uparrow\rangle, \varphi = |\downarrow\rangle, |\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

gli stati per il fascio rispettivamente a *spin* parallelo a z , antiparallelo a z e parallelo a x . Tipici esempi di predizioni quantistiche sono dati dalle probabilità condizionate (indicando con u, d le due possibili direzioni della deflessione):

$$\begin{aligned} P(u|\psi) &= |\langle\uparrow|\uparrow\rangle|^2 = P(d|\varphi) = |\langle\downarrow|\downarrow\rangle|^2 = 1, \\ P(d|\psi) &= |\langle\uparrow|\downarrow\rangle|^2 = P(u|\varphi) = |\langle\downarrow|\uparrow\rangle|^2 = 0, \\ P(u|\xi) &= |\langle\uparrow|\xi\rangle|^2 = P(d|\xi) = |\langle\downarrow|\xi\rangle|^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Supponiamo ora di avere a disposizione un altro parametro nascosto, che possa assumere valori $W = w_1, w_2$ con regole di probabilità per l'esperimento considerato date da

$$P(u|\xi, w_1) = \frac{3}{4}, \quad P(u|\xi, w_2) = \frac{1}{4}.$$

Tali nuove predizioni sono consistenti con quelle fatte in precedenza; ciò si verifica considerando w_1, w_2 equiprobabili e marginalizzando la distribuzione di probabilità condizionata $P(u|\xi, W)$ rispetto a W (cioè “ignorando” il nuovo parametro):

$$P(u|\xi) = \sum_{W=w_1, w_2} P(W)P(u|\xi, W) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Questo semplice esempio illustra come:

- 1) esistano potenziali *estensioni* della Teoria Quantistica, che la renderebbero ad oggi non massimamente informativa ed *incompleta*;
- 2) tali *completamenti* non debbano essere necessariamente deterministici.

Una risposta negativa alla domanda da cui prende le mosse [1] avrebbe implicazioni importanti, di rilevanza sia fondazionale sia pratica.

Il problema investe, infatti, il limite al grado di conoscenza del mondo fisico a cui, *in linea di principio*, si possa aspirare; d'altra parte, un risultato del genere avrebbe ricadute sulle notevoli applicazioni tecnologiche che sfruttano il *probabilismo* intrinseco alla teoria (*ontico*); tra tutte, si può citare il campo della crittografia quantistica, dal momento che la dimostrazione della sicurezza di molti protocolli si basa (anche non in maniera esplicita) sull'assunzione della *non estendibilità* della Teoria Quantistica stessa (come fatto notare in [1]).

1.3 Approccio al problema

L'impianto formale adottato da Colbeck e Renner per dare una soluzione al problema (aperto, come si è visto) dell'*estendibilità* della Teoria Quantistica si basa su due semplici assunzioni di carattere fisico.

La prima, a cui ci si riferirà nel seguito denotandola con *FR*, è l'assunzione che uno sperimentatore, all'atto della misurazione, possa scegliere in maniera *libera* l'osservabile di cui intende ottenere una misura.

Cosa significhi *scelta libera* ai fini della presente trattazione verrà specificato meglio nel seguito, caratterizzando la nozione con una forma matematica adeguata alla dimostrazione del risultato principale.

Ad ogni modo, in [1] si afferma che l'assunzione *FR* riguarda più in generale il libero arbitrio, ipotesi in linea di principio falsificabile, per esempio da un dispositivo che sia in grado di prevedere le scelte dello sperimentatore.

In [8], Bell argomenta contro critiche che gli sono mosse riguardo all'aver altrove assunto che “*the settings of instruments are [...] at least effectively free*”, cioè che “le condizioni sperimentali siano [...] libere almeno in maniera effettiva”.

Per evitare di chiamare in causa il libero arbitrio, Bell indebolisce le proprie ipotesi, estromettendo dal processo di misurazione un ruolo attivo dello sperimentatore. Tuttavia richiede almeno che l'esperimento possa essere condotto tramite condizioni sperimentali “scelte” (o, meglio, impostate) da generatori di numeri casuali; infine mostra che così continuerebbe a valere la “*effective freedom*” richiesta. Conclude scrivendo:

“Naturalmente potrebbe darsi che queste idee ragionevoli su generatori fisici casuali siano semplicemente sbagliate –per gli scopi in questione. Può presentarsi una teoria in cui simili cospirazioni abbiano luogo inesorabilmente; tali cospirazioni possono allora sembrare meno indigeste delle non-località di altre teorie. Quando questa teoria sarà annunciata, io non mi rifiuterò di ascoltarla, o su basi metodologiche o di altra natura. Ma non cercherò di fare io stesso una simile teoria.”

La seconda assunzione, presentata in forma bipartita e denotata con *QM*, afferma che le predizioni quantistiche (fatte in base alla teoria per come è attualmente formulata) sono corrette.

Questa è un'ipotesi del tutto naturale, dato che gli autori di [1] si interrogano sulla possibilità di *estendere* la teoria.

Successivamente viene condotta la dimostrazione matematica di un lemma funzionale alla dimostrazione del risultato finale, il *Teorema 1*, il quale afferma che, per ogni stato puro fissato, l'unica informazione non banale sull'*outcome* di una misurazione è fornita da una data impostazione dell'apparato sperimentale, cioè che *ogni informazione addizionale fornita da una teoria estesa è del tutto irrilevante*.

La dimostrazione formale del teorema sfrutta una strutturazione del tutto generale della potenziale teoria candidata ad estendere la Teoria Quantistica: l'accesso all'informazione addizionale è modellizzato come una *black box* che funziona con un *input* (richiesta della variabile addizionale da misurare) ed un *output* (l'effettivo risultato, o *outcome*, del processo di misurazione).

La misurazione addizionale può essere di natura sia classica sia quantistica, oppure può corrispondere ad una variabile di natura più generale.

Prima verrà preso in considerazione uno stato massimamente *entangled* a due livelli, cioè un qualsiasi *stato di Bell*:

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle),$$

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle).$$

Sarà quindi dimostrato il *Teorema 1* per misurazioni di rango unitario su questo tipo di stati; il risultato potrà essere esteso in maniera diretta a sistemi descritti da spazi di Hilbert di dimensione 2^n (n intero positivo) applicando il teorema a n sistemi a due livelli.

Infine sarà mostrato che il teorema è valido in generale per stati puri qualunque; ciò verrà fatto estendendo lo spazio di Hilbert su cui si operava la misurazione della prima parte e considerando lo stato del sistema unitamente a parte dell'ambiente *entangled* con quello dell'apparato misuratore.

Capitolo 2

La misurazione quantistica

2.1 Descrizione dei sistemi quantistici*

La struttura matematica più adatta a descrivere i sistemi quantistici è lo *spazio di Hilbert*, qui di seguito definito.

Definizione 2.1. *Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{C} , completo rispetto alla metrica indotta dal prodotto scalare hermitiano (\cdot, \cdot) definito su di esso.*

Ad ogni sistema fisico si può associare uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_S detto *spazio degli stati*. Il sistema è descritto in maniera completa da un

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S : \|\psi\| \equiv \sqrt{(|\psi\rangle, |\psi\rangle)} = \sqrt{|\langle\psi|\psi\rangle|} = 1,$$

chiamato *vettore di stato*.

È utile definire il concetto di *operatore lineare* agente su uno spazio di Hilbert, dal momento che esso interviene nella modellizzazione dell'evoluzione temporale dei sistemi, nonché nella descrizione dei processi di misurazione.

Definizione 2.2. *Un operatore lineare definito su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} è una funzione $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tale che*

$$A\left(\sum_i a_i |\psi_i\rangle\right) = \sum_i a_i (A |\psi_i\rangle)$$

per ogni $a_i \in \mathbb{C}$, $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$.

Definizione 2.3. *L'operatore A^\dagger si dice aggiunto dell'operatore lineare A se soddisfa*

$$(|\psi_1\rangle, A |\psi_2\rangle) = (A^\dagger |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle). \quad (2.1)$$

Se vale $A = A^\dagger$, A è detto hermitiano.

*Per una più esauriente trattazione degli argomenti relativi alla descrizione dei sistemi e della misurazione quantistici, consultare [9].

Si vede facilmente, definendo $\langle \psi | := |\psi\rangle^\dagger$, che $(A^\dagger |\psi\rangle)^\dagger = \langle \psi | A$.
Prendendo i coniugati hermitiani della (2.1), poi, è anche diretto verificare che $(A^\dagger)^\dagger = A$.

Definizione 2.4. *Un operatore U è detto unitario se vale $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1}$.*

Si verifica subito che l'azione di un operatore unitario conserva la norma, infatti:

$$\|U |\psi\rangle\| \equiv \sqrt{|\langle \psi | U^\dagger U |\psi\rangle|} \equiv \sqrt{|\langle \psi | \mathbb{1} |\psi\rangle|} = \sqrt{|\langle \psi | \psi\rangle|} \equiv \| |\psi\rangle \|.$$

L'evoluzione temporale dello stato di un sistema *chiuso* è descritta dall'equazione differenziale al primo ordine nel tempo:

$$\mathcal{H} |\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t}, \quad (2.2)$$

detta *equazione di Schrödinger* (\mathcal{H} è lo hamiltoniano del sistema e \hbar è la costante di Planck scalata di 2π).

Si può mostrare che la soluzione dell'equazione di Schrödinger è un'evoluzione *unitaria* dei vettori di stato, cioè data dall'azione di un operatore unitario:

$$|\psi_t\rangle = U |\psi\rangle;$$

essa conserva dunque la norma delle soluzioni della (2.2) (ovvero la probabilità su tutto lo spazio).

Siano $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_n$ gli spazi degli stati che descrivono n sistemi; denotando con \mathcal{H}_C lo spazio degli stati del sistema composto, questo sarà dato dal prodotto tensore degli \mathcal{H}_i degli n sottosistemi:

$$\mathcal{H}_C = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n.$$

Pertanto lo stato di C e la sua evoluzione temporale saranno descritti da elementi $|\Psi\rangle \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$, sempre a norma unitaria.

Prima di passare alla descrizione della misurazione quantistica, introduciamo un operatore molto adatto a trattarla.

Definizione 2.5. *Si supponga di avere un sistema, in generale, che può essere descritto da un set di stati $\{|\psi_i\rangle\}$, per $i = 1, \dots, n \in \mathbb{N}^+$, con rispettive probabilità date da p_1, \dots, p_n .*

Si definisce ensemble di stati puri la collezione $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ e ad essa si associa un operatore (o matrice) densità definito da:

$$\varrho := \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|.$$

Servendosi di ϱ , l'evoluzione temporale è descritta da una *trasformazione di similitudine*:

$$\varrho_t \equiv \sum_i p_i |\psi_{t,i}\rangle \langle \psi_{t,i}| = \sum_i p_i U |\psi_i\rangle \langle \psi_i| U^\dagger \equiv U \varrho U^\dagger.$$

Definizione 2.6. Si può anche definire un ensemble di stati misti come $\{p_j, \varrho_j\}$, ove ϱ_j è associato a $\{p_{ji}, |\psi_{ji}\rangle\}$.

Allora

$$\varrho := \sum_j p_j \varrho_j \equiv \sum_{j,i} p_j p_{ji} |\psi_{ji}\rangle \langle \psi_{ji}|$$

è detto mix di stati ϱ_j .

2.2 Tipologie di misurazione

Le misurazioni quantistiche sono descritte, per ogni osservabile considerata, da un insieme di *operatori di misurazione* $\{E_x\}$ che agiscono sui vettori di stato. L'indice x denota i possibili *outcome* della particolare grandezza considerata.

Se un dato sistema è descritto dal vettore di stato $|\psi\rangle$, subito dopo una misurazione questo avrà probabilità

$$p_x = \|E_x |\psi\rangle\| \equiv \langle \psi | E_x^\dagger E_x | \psi \rangle$$

di essere collassato in

$$|\psi_x\rangle = \frac{E_x |\psi\rangle}{\|E_x |\psi\rangle\|}.$$

Poiché le probabilità devono sommarsi all'unità, si ha un'equazione di completezza mediante gli $\{E_x\}$. Infatti:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_x p_x = \langle \psi | \left(\sum_x E_x^\dagger E_x \right) | \psi \rangle, \quad \forall |\psi\rangle \\ &\implies \sum_x E_x^\dagger E_x := \sum_x G_x = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Definizione 2.7. Si definisce POVM¹ la collezione $\{G_x\}$, per cui i G_x sono detti elementi della POVM.

Il *formalismo POVM*, sfruttando l'operatore densità, permette di trattare agevolmente gli effetti della misurazione per come sono stati presentati in

¹La sigla sta per "Positive Operator-Valued Measure", termine tecnico che ha motivazioni storiche.

precedenza. Infatti, per ogni stato iniziale $|\psi_i\rangle$ tratto da un ensemble di stati puri, vale

$$p_{x|i} = \langle \psi_i | G_x | \psi_i \rangle \equiv \sum_k \langle \psi_i | E_x^\dagger | k \rangle \langle k | E_x | \psi_i \rangle \equiv \text{tr}(G_x |\psi_i\rangle \langle \psi_i|), \quad (2.3)$$

dove si sono usate la *spetttralizzazione dell'identità* sulla base ortonormale $\{|k\rangle\}$, la definizione di *traccia* e la sua proprietà d'invarianza per permutazioni cicliche dei suoi argomenti; mediando sugli stati dell'ensemble si ottiene:

$$p_x = \sum_i p_{x|i} p_i \equiv \text{tr} \left[G_x \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right] \equiv \text{tr}(G_x \varrho).$$

Per ogni stato puro $|\psi_i\rangle$ dell'ensemble, lo stato del sistema dopo la misurazione con lettura del valore x sarà

$$|\psi_{i,x}\rangle = \frac{E_x |\psi_i\rangle}{\|E_x |\psi_i\rangle\|}$$

e perciò l'operatore densità associato è

$$\varrho_x = \sum_i p_{i|x} |\psi_{i,x}\rangle \langle \psi_{i,x}| = \sum_i p_{i|x} \frac{E_x |\psi_i\rangle \langle \psi_i| E_x^\dagger}{\|E_x |\psi_i\rangle\|^2};$$

ma per la (2.3) e per definizione di probabilità condizionata si ha:

$$p_{i|x} \equiv \left. \begin{aligned} \|E_x |\psi_i\rangle\|^2 = p_{x|i} \\ \frac{p_{x|i} p_i}{p_x} = \frac{p_{x|i} p_i}{\text{tr}(G_x \varrho)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varrho_x = \frac{E_x \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) E_x^\dagger}{\text{tr}(G_x \varrho)} \equiv \frac{E_x \varrho E_x^\dagger}{\text{tr}(G_x \varrho)}.$$

ϱ_x è proprio un generico elemento di un *mix di stati* ed ha probabilità associata $p_x = \text{tr}(G_x \varrho)$. Quindi lo stato dopo la misurazione, nell'ipotesi che si ignori il risultato, è descritto dall'operatore densità:

$$\varrho = \sum_x p_x \varrho_x = \sum_x E_x \varrho E_x^\dagger.$$

Un caso particolare di POVM è dato dalle *misure proiettive* o di *von Neumann*; queste sono descritte da un operatore hermitiano \hat{M} dotato di *decomposizione spettrale* su proiettori Π_x ortogonali di rango unitario:

$$\hat{M} = \sum_x x \Pi_x.$$

Il sistema dei $\{\Pi_x\}$ è *completo* ed i suoi elementi sono hermitiani e *idempotenti*:

$$\Pi_x^\dagger \Pi_x = \Pi_x^2 = \Pi_x \quad (2.4)$$

Dato uno stato iniziale $|\psi\rangle$, il sistema subito dopo la misura si troverà nello stato

$$|\psi_x\rangle = \frac{\Pi_x |\psi\rangle}{\|\Pi_x |\psi\rangle\|}$$

con probabilità

$$p_x = \|\Pi_x |\psi\rangle\| \equiv \langle\psi| \Pi_x^\dagger \Pi_x |\psi\rangle = \langle\psi| \Pi_x |\psi\rangle.$$

L'*expected value* dell'osservabile ha un'espressione semplice:

$$\langle M \rangle = \sum_x x p_x \equiv \langle\psi| \left(\sum_x x \Pi_x \right) |\psi\rangle = \langle\psi| \hat{M} |\psi\rangle.$$

Lo strumento delle POVM generalizza tale misurazione ed è necessario quando non è importante sapere lo stato del sistema dopo una misurazione, ma si vogliono conoscere le probabilità dei vari *outcome*.

Alla luce di quanto è stato detto nella sezione precedente, la matrice densità di un sistema composto (descritto in \mathcal{H}_C) corrispondente ad uno stato fattorizzato è

$$\varrho_C = \varrho_1 \otimes \varrho_2 \otimes \dots \otimes \varrho_n.$$

Definizione 2.8. Date le matrici densità $\varrho_1 \in \mathcal{H}_A$ e $\varrho_2 \in \mathcal{H}_B$, la traccia parziale sul sistema B è così definita:

$$\text{tr}_B(\varrho_1 \otimes \varrho_2) := \text{tr}(\varrho_2)\varrho_1.$$

Partendo dalla matrice densità fattorizzata ϱ_{AB} su $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, si può allora definire la *matrice densità ridotta*:

$$\varrho_A := \text{tr}_B(\varrho_{AB});$$

ϱ_A è ancora una matrice densità e fornisce la corretta statistica del sistema che è descritto dal solo \mathcal{H}_A .

2.3 La misurazione come *quantum operation*

Verrà ora sintenticamente introdotto il concetto di *quantum operation*, utile a trattare l'evoluzione dinamica dei sistemi.

Le *quantum operation*, infatti, sono mappe lineari che generalizzano l'evoluzione unitaria ed il processo di misurazione visti in precedenza:

$$\mathcal{E}(\varrho) = U\varrho U^\dagger,$$

$$\mathcal{E}_x(\varrho) = E_x \varrho E_x^\dagger$$

ne sono semplici esempi; pertanto nella notazione delle *quantum operation* (tralasciando il caso banale di evoluzione unitaria) si può scrivere che, dopo la misurazione, il sistema ha probabilità

$$p_x = \text{tr}(\mathcal{E}_x(\varrho))$$

di essere rappresentato dall'operatore densità

$$\sigma_x = \frac{\mathcal{E}_x(\varrho)}{\text{tr}(\mathcal{E}_x(\varrho))}.$$

Si consideri l'operatore densità ϱ_S di un sistema (*sistema principale*) su cui si vuole operare una misurazione.

In generale, il sistema principale e l'*ambiente* interagiscono continuamente (una via per esprimere questo fatto è pensare a scambi di calore); in questo modo tra i due sistemi si creano correlazioni.

Tuttavia, in molte situazioni di interesse, come quella della misurazione considerata ai fini della dimostrazione del *Teorema 1*, si può assumere che sistema principale ed ambiente partano in uno stato congiunto puro, quindi per caratterizzare il sistema principale dopo che è stato sottoposto ad una trasformazione T si può scrivere:

$$\mathcal{E}(\varrho_S) = \text{tr}_{\text{amb}}[T(\varrho_S \otimes \varrho_{\text{amb}})T^\dagger].$$

Come può T rappresentare l'ambiente reale, che ha un numero di gradi di libertà che tende ad infinito?

Se si pone $\dim(\mathcal{H}_S) = d$, risulta che è sufficiente prendere $\dim(\mathcal{H}_{\text{amb}}) = d^2$ e che non è nemmeno necessario che ϱ_{amb} iniziale sia un *mix di stati*.

Vediamo ora brevemente come si può modellizzare la misurazione considerata nel seguito della trattazione (incluso anche l'apparato sperimentale D).

Il sistema principale è descritto da ϱ_S ; lo stato di S dopo la misurazione, condizionato da un particolare *outcome*, è

$$\sigma_S^x = \frac{E_x \varrho_S E_x^\dagger}{\text{tr}(G_x \varrho_S)}.$$

Si può definire una mappa lineare *trace-preserving*:

$$\mathcal{E} : \varrho_S \mapsto \sigma_S = \sum_x \underbrace{\text{tr}(G_x \varrho_S)}_{=p_x} \sigma_S^x = \sum_x E_x \varrho_S E_x^\dagger,$$

che mappa ϱ_S nello stato post-misurazione mediato su tutti gli *outcome* possibili. \mathcal{E} può essere considerata parte di una mappa dello stesso tipo, ma estesa a D e al sistema ancillare R (parte dell'ambiente):

$$\bar{\mathcal{E}} : \varrho_S \mapsto \sigma_{\text{SDR}},$$

tale che $tr_{\text{DR}}(\bar{\mathcal{E}}(\varrho_S)) = \mathcal{E}(\varrho_S)$ e che σ_{SDR} descriva l'evoluzione congiunta dei tre sistemi sotto il processo di misurazione.

Prendendo R grande a sufficienza, $\bar{\mathcal{E}}$ può essere scelta isometrica. Dal momento che l'*outcome* della misurazione è determinato dallo stato finale di D , esiste un sistema di proiettori mutuamente ortogonali $\{\Pi_x\}$ su \mathcal{H}_D , quindi si richiede che, definito $T := \mathbb{1}_S \otimes \Pi_x \otimes \mathbb{1}_R$,

$$tr_{\text{DR}}(T\bar{\mathcal{E}}(\varrho_S)T^\dagger) \equiv tr_{\text{DR}}(\bar{\mathcal{E}}(\varrho_S)T) = E_x \varrho_S E_x^\dagger, \quad \forall x \quad (2.5)$$

Parte II

Capitolo 3

Definizioni

In questo capitolo verranno fornite alcune definizioni accessorie alla trattazione del problema ed in particolare alla formulazione delle assunzioni su cui si basa il risultato principale di [1].

Questa parte si divide in tre sezioni: le prime due si riferiscono alle assunzioni di carattere fisico, che coinvolgono

- (3.1) l'indipendenza stocastica dell'atto di *scelta* di una particolare misurazione da qualsiasi evento fisico che preceda temporalmente tale atto in qualsiasi sistema di riferimento;
- (3.2) la Teoria Quantistica per come è attualmente formulata;

la terza, invece, si lega al capitolo successivo, limitandosi a definire i due oggetti matematici su cui si baserà la dimostrazione del *Teorema 1*.

3.1 Definizioni relative all'assunzione FR

Per iniziare, si definiranno le nozioni di *variabile aleatoria spaziotemporale* (o *SV*) e di *coppia di SV cronologicamente ordinata*; queste rendono conto in maniera naturale della struttura spaziotemporale in cui è modellizzato l'accesso alle informazioni addizionali di una potenziale teoria quantistica estesa.

È opportuno far notare che non occorre fare ipotesi aggiuntive sulla Teoria della Relatività (tutto ciò che serve è una relazione d'ordine tra gli elementi di \mathbb{M}^4 –lo spaziotempo di Minkowski– nonché la struttura causale dei coni-luce relativistici). Il contesto in cui si opera è di natura prettamente operativa, ragion per cui viene piuttosto naturale associare agli *outcome* sperimentali (di cui oltre) un set di coordinate spaziotemporali misurabili, una volta stabilito un sistema di riferimento, in maniera consueta (mediante orologi e righe graduate).

Definizione 3.1. *Una variabile aleatoria spaziotemporale (SV) è una variabile random cui si associano coordinate $(t, \mathbf{r}) \equiv (t, r_1, r_2, r_1) \in \mathbb{M}^4$.*

Definizione 3.2. Una coppia X, X' di SV è detta cronologicamente ordinata ($X \rightsquigarrow X'$) se valgono le condizioni:

$$(t - t')^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 \geq 0,$$

$$t \leq t';$$

ovvero se le coordinate a loro associate sono separate da un vettore timelike o lightlike.

Definizione 3.3. Due coppie di SV cronologicamente ordinate, $A \rightsquigarrow X$ e $B \rightsquigarrow Y$, si dicono separate in modo spacelike se $A \not\rightsquigarrow Y$ e $B \not\rightsquigarrow X$, ovvero se X e Y non giacciono nel futuro causale rispettivamente di B e A .

Il processo di scelta dell'osservabile da misurare è descritto da una coppia di SV

$$O_A \rightsquigarrow A,$$

ove O_A è chiamato evento *trigger*. Tale processo è considerato *libero* se A non è correlata ad alcuna SV precedente ad O_A in qualsiasi sistema di riferimento, in conformità con la definizione che segue.

Definizione 3.4. Dato un set di SV, Γ , si dice scelta libera rispetto a Γ una coppia

$$O_A \rightsquigarrow A \mid \Gamma' := \{W \in \Gamma \mid O_A \not\rightsquigarrow W\} \Rightarrow P_{A\Gamma'} = P_A P_{\Gamma'},$$

cioè tale che sia verificata l'indipendenza statistica di A dagli eventi che giacciono fuori dal futuro causale del suo evento *trigger*.

3.2 Definizioni relative alle assunzioni QM

Si andrà ora a definire una *misurazione quantistica* (e pertanto nel seguito ci si riferirà a tale definizione) unitamente alla nozione di *misurazione quantistica compatibile* con lo stato di un sistema fisico.

Definizione 3.5. Una misurazione quantistica ($A \rightsquigarrow X, \{E_x^a\}_{a,x}, \mathcal{H}_S$) è una coppia di SV cronologicamente ordinata (ove A e X sono chiamate rispettivamente input ed output) cui è associata una famiglia di operatori di misurazione $\{E_x^a\}_{a,x}$ (gli indici a, x corrono su tutti i valori che possono assumere A, X) definiti su uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_S e tali per cui valga

$$\sum_x E_x^{a\dagger} E_x^a = \mathbf{1}_S.$$

Definizione 3.6. Dato su \mathcal{H}_S un operatore densità ϱ_S , una misurazione quantistica sarà detta compatibile con ϱ_S se vale

$$P_{X|A}(x|a) = \text{tr}(E_x^{a\dagger} E_x^a \varrho_S), \quad \forall a, x.$$

Similmente, due misure $(A \rightsquigarrow X, \{E_x^a\}_{a,x}, \mathcal{H}_S)$ e $(B \rightsquigarrow Y, \{F_y^b\}_{b,y}, \mathcal{H}_T)$ saranno dette compatibili con l'operatore densità ϱ_{ST} (definito su $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_T$) se vale

$$P_{XY|AB}(x, y|a, b) = \text{tr}[(E_x^{a\dagger} E_x^a \otimes F_y^{b\dagger} F_y^b) \varrho_{ST}].$$

3.3 Definizioni relative al *Lemma 1*

Introduciamo ora la *distanza variazionale*.

Definizione 3.7. Siano P_X, P_Y due distribuzioni di probabilità definite su uno stesso alfabeto Υ . La loro distanza variazionale è

$$D(P_X, P_Y) := \frac{1}{2} \sum_{i \in \Upsilon} |P_X(i) - P_Y(i)|.$$

Si vede subito che, per ogni P_Q, P_R (distribuzioni definite sullo stesso alfabeto) si ha sempre $D(P_Q, P_R) \in [0, 1]$.

Si può mostrare che la distanza variazionale gode della proprietà di simmetria per scambio dei suoi argomenti e soddisfa la disuguaglianza triangolare.

Concludiamo definendo una quantità mediante la quale sarà costruita la stima (4.5) di cui al *Lemma 1*.

Definizione 3.8. Siano A, B, X, Y quattro SV e $A \in \{0, 1, \dots, 2N-2\}$, $B \in \{1, 3, \dots, 2N-1\}$ (per $N \in \mathbb{N}^+$) due parametrizzazioni di A e B . Definiamo allora, con ovvia notazione:

$$\begin{aligned} I_N(P_{XY|AB}) &:= P_{XY|AB}(X = Y | A = 0, B = 2N - 1) \\ &+ \sum_{\substack{a, b \\ |a-b|=1}} P(X \neq Y | A = a, B = b) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Capitolo 4

Assunzioni e risultati preliminari

4.1 Ipotesi fisiche

Assunzione QM_a . Si consideri un'arbitraria misurazione quantistica:

$$(A \rightsquigarrow X, \{E_x^a\}_{a,x}, \mathcal{H}_S) \quad (4.1)$$

avente input $A = \bar{a}$ costante. Esiste uno stato puro descritto da un operatore densità ρ_S con cui tale misurazione è compatibile.

Assunzione QM_b . Siano:

- $(A' \rightsquigarrow X', \{F_{x'}^{a'}\}_{a',x'}, \mathcal{H}_D)$ una misurazione sull'apparato usato per la (4.1) tale che $F_{x'}^{\bar{a}} = \Pi_x$;
- $(B \rightsquigarrow Y, \{Q_y^b\}_{b,y}, \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R)$ una misurazione sul sistema SR (ove R rappresenta parte dell'ambiente).

Esiste $\sigma_{\text{SDR}} = \bar{\mathcal{E}}(\rho_S)$ con cui tali misure sono compatibili; inoltre, la misurazione su D è consistente con la misurazione su S, nel senso che, se $A' = A = \bar{a}$, sarà anche $X' = X$.

Assunzione FR. Il set di SV $\{O_A, O_{A'}, O_B, O_C\}$ è tale che:

- $O_A \rightsquigarrow X, O_{A'} \rightsquigarrow X', O_B \rightsquigarrow Y, O_C \rightsquigarrow Z$ siano separate in modo spacelike
- $O_A \rightsquigarrow A, O_{A'} \rightsquigarrow A', O_B \rightsquigarrow B, O_C \rightsquigarrow C$ siano scelte libere rispetto al set di SV $\{A, A', B, C, X, X', Y, Z\}$

Tutti i valori di A, A', B sono assunti con probabilità non nulle.

4.2 Commenti ed osservazioni

L'assunzione FR ci permette di considerare le SV A, B, C come *scelte libere* rispetto al set di SV definito sopra; ciò ha immediate conseguenze che si riflettono sulle loro distribuzioni di probabilità congiunte e condizionate. Prendendo come esempio A , FR implica

$$P_{A|BCYZ} \equiv \frac{P_{ABCYZ}}{P_{BCYZ}} \stackrel{FR}{=} P_A.$$

Si ottiene quindi facilmente:

$$\left. \begin{aligned} P_{(YZ)A|BC} &= P_{YZ|BC}P_{A|BCYZ} = P_{YZ|BC}P_A \\ P_{A(YZ)|BC} &= P_{A|BC}P_{YZ|ABC} = P_AP_{YZ|ABC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_{YZ|ABC} = P_{YZ|BC}$$

Ripetendo ciò anche per B, C , si ricavano le *condizioni di non-signalling*:

$$\begin{cases} P_{YZ|ABC} = P_{YZ|BC} \\ P_{XZ|ABC} = P_{XZ|AC} \\ P_{XY|ABC} = P_{XY|AB} \end{cases} \quad (4.2)$$

Nel seguito A, B indicheranno i due siti della misurazione sullo stato massimamente *entangled* considerato nella prima parte della dimostrazione del *Teorema 1*, mentre la coppia $C \rightsquigarrow Z$ modellerà l'accesso all'informazione addizionale.

Le (4.2) riflettono proprio la *effective freedom* richiesta da Bell in [8].

4.3 Risultati matematici

È ora conveniente dimostrare alcune utili risultati di cui ci si servirà per dimostrare il *Teorema 1*.

Proposizione 1. *Siano X, Y due variabili aleatorie e P_{XY}, Q_{XY} due distribuzioni di probabilità congiunte a loro associate. Queste soddisfano la seguente relazione:*

$$D(P_X, Q_X) \leq D(P_{XY}, Q_{XY}) \quad (4.3)$$

ove P_X, Q_X indicano le distribuzioni marginalizzate rispetto ad Y .

Dimostrazione. Le marginali di P_{XY} e Q_{XY} sono date da $P_X = \sum_y P_{XY}(x, y)$ e $Q_X = \sum_y Q_{XY}(x, y)$. Allora si ha

$$\begin{aligned} D(P_X, Q_X) &\equiv \frac{1}{2} \sum_x \left| \sum_y (P_{XY} - Q_{XY}) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{x,y} |P_{XY} - Q_{XY}| \equiv D(P_{XY}, Q_{XY}) \end{aligned}$$

□

Proposizione 2. Siano P_X, P_Y due distribuzioni di probabilità definite sullo stesso alfabeto Υ . La loro distanza variazionale è convessa.

Dimostrazione. Ponendo $\mathbb{P} := (P_X, P_Y)$, siano $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ due distinte distribuzioni del tipo \mathbb{P} (definite sempre sullo stesso alfabeto). Si può allora vedere che una combinazione convessa di

$$\begin{cases} D(\mathbb{P}_1) := \frac{1}{2} \sum_{i \in \Upsilon} |P_{X,1}(i) - P_{Y,1}(i)| \\ D(\mathbb{P}_2) := \frac{1}{2} \sum_{i \in \Upsilon} |P_{X,2}(i) - P_{Y,2}(i)| \end{cases}$$

soddisfa la condizione di convessità per la $D(\mathbb{P})$; per $t \in [0, 1]$, infatti, si ha:

$$\begin{aligned} tD(\mathbb{P}_1) + (1-t)D(\mathbb{P}_2) &\equiv \frac{1}{2} \sum_i \left(\underbrace{t|P_{X,1} - P_{Y,1}|}_{|t(P_{X,1} - P_{Y,1})|} + \underbrace{(1-t)|P_{X,2} - P_{Y,2}|}_{|(1-t)(P_{X,2} - P_{Y,2})|} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_i |t(P_{X,1} - P_{Y,1}) + (1-t)(P_{X,2} - P_{Y,2})| \\ &\equiv D(t\mathbb{P}_1 + (1-t)\mathbb{P}_2) \end{aligned}$$

(si è applicata la disuguaglianza triangolare). \square

Proposizione 3. Siano X, Y due variabili aleatorie con distribuzione di probabilità congiunta P_{XY} . Denotando con P_X, P_Y le marginali, vale la seguente disuguaglianza

$$D(P_X, P_Y) \leq P(X \neq Y) \quad (4.4)$$

Dimostrazione. Possiamo riscrivere convenientemente la probabilità congiunta come

$$P_{XY} = \underbrace{P(X \neq Y)}_{:=p_{\neq}} \underbrace{P_{XY|X \neq Y}}_{:=P_{XY}^{\neq}} + \underbrace{P(X = Y)}_{\equiv 1-p_{\neq}} \underbrace{P_{XY|X=Y}}_{:=P_{XY}^{\equiv}}$$

Dunque, per linearità, le marginali saranno date da:

$$\begin{cases} P_X = p_{\neq} P_X^{\neq} + (1-p_{\neq}) P_X^{\equiv} \\ P_Y = p_{\neq} P_Y^{\neq} + (1-p_{\neq}) P_Y^{\equiv} \end{cases}$$

Per la *Proposizione 2* la distanza variazionale è convessa, allora vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$D(P_X, P_Y) \leq p_{\neq} \underbrace{D(P_X^{\neq}, P_Y^{\neq})}_{\leq 1} + (1-p_{\neq}) \underbrace{D(P_X^{\equiv}, P_Y^{\equiv})}_{\equiv 0} \leq p_{\neq} \equiv P(X \neq Y)$$

\square

Lemma 1. *Siano X, Y due variabili aleatorie binarie e $P_{XYZ|ABC}$ una distribuzione di probabilità che soddisfa le condizioni di non-signalling (4.2). Allora vale:*

$$D(P_{Z|abcx}, P_{Z|abc}) \leq I_N(P_{XY|AB}) \quad (4.5)$$

Dimostrazione. Iniziamo cercando un *bound* per $D(1 - P_{X|acz}, P_{X|acz})$ a partire dalla (3.1) con C, Z fissati. Per semplicità, definiamo $a_0 := 0, b_0 := 2N - 1$ ed usiamo la (4.4):

$$\begin{aligned} I_N(P_{XY|ABcz}) &= \underbrace{P(X = Y|A = a_0, B = b_0, C = c, Z = z)}_{\equiv P(\bar{X} \neq Y|a_0, b_0, c, z) \geq D(1 - P_{X|a_0, b_0, c, z}, P_{Y|a_0, b_0, c, z})} \\ &+ \sum_{\substack{a, b \\ |a-b|=1}} \underbrace{P(X \neq Y|A = a, B = b)}_{\geq D(P_{X|abcz}, P_{Y|abcz})} \\ &\geq D(1 - P_{X|a_0cz}, P_{Y|b_0cz}) + \sum_{\substack{a, b \\ |a-b|=1}} D(P_{X|acz}, P_{Y|bcz}). \end{aligned}$$

Perciò, applicando ripetutamente la disuguaglianza triangolare alle distanze variazionali ed usando dove necessario le condizioni (4.2), si ottiene che

$$\begin{aligned} I_N(P_{XY|ABcz}) &\geq D(1 - P_{X|a_0cz}, P_{X|a_0cz}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x=0}^1 |1 - 2P_{X|a_0cz}(x)| \\ &\equiv 2D(P_{X|a_0b_0cz}, \underbrace{1/2}_{:= \bar{P}_X}). \end{aligned}$$

Dal momento che a, b sono semplicemente dei *label* apposti alle variabili A, B per etichettare delle scelte particolari delle due misure (parametrizzate in funzione di un intero positivo N), per simmetria si può ritenere valida questa disuguaglianza per ogni $a, b \in \text{Rng}(A), \text{Rng}(B)$ rispettivamente, cioè vale

$$D(P_{X|abcz}, \bar{P}_X) \leq \frac{1}{2} I_N(P_{XY|ABcz}), \quad \forall a, b, c, z \text{ fissati} \quad (4.6)$$

Mediando questi due termini su z (cioè ricavando le marginali, rispetto a z , delle distribuzioni che vi compaiono) ed usando ancora una volta le (4.2), si

ottengono:

$$\begin{aligned}
\sum_z P_{Z|abc}(z) I_N(P_{XY|ABcz}) &\equiv \sum_z \left[P_{Z|a_0b_0c}(z) P(X = Y|a_0, b_0, c, z) \right. \\
&\quad \left. + P_{Z|abc}(z) \sum_{\substack{a,b \\ |a-b|=1}} P(X \neq Y|a, b, c, z) \right] \\
&= P(X = Y|a_0, b_0, c) + \sum_{\substack{a,b \\ |a-b|=1}} P(X \neq Y|a, b, c) \\
&\equiv I_N(P_{XY|ABc}) = I_N(P_{XY|AB})
\end{aligned} \tag{4.7}$$

ed anche, per definizione di probabilità condizionata,

$$\begin{aligned}
\sum_z P_{Z|abc}(z) D(P_{X|abcz}, \bar{P}_X) &= \frac{1}{2} \sum_{x,z} |P_{X|abc}(x) P_{Z|abc}(z) - \bar{P}_X P_{Z|abc}(z)| \\
&\equiv D(P_{XZ|abc}, \bar{P}_X P_{Z|abc}) \\
&\stackrel{(4.3)}{\geq} D(P_{X|abc}, \bar{P}_X) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left| P_{X|abc}(x) - \frac{1}{2} \right| + \left| 1 - P_{X|abc}(x) - \frac{1}{2} \right| \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left| P_{X|abc}(x) - \frac{1}{2} \right| + \left| P_{X|abc}(x) - \frac{1}{2} \right| \right) \\
&= \left| P_{X|abc}(x) - \frac{1}{2} \right| \text{ per } x = 0, 1
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Allora, mettendo insieme la (4.7) e la (4.8), si ha:

$$\left| P_{X|abc}(x) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2} I_N(P_{XY|ABcz}), \quad \forall a, b, c, x \tag{4.9}$$

D'altronde per la (4.6) e per la (4.7) si ha anche che

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} I_N(P_{XY|AB}) &\geq \sum_z P_{Z|abc}(z) D(P_{X|abc(z), \cdot}, \bar{P}_X) \\
&\equiv \sum_{x,z} \left| P_{XZ|abc}(x, z) - \frac{1}{2} P_{Z|abc}(z) \right| \\
&\geq \sum_z \left| P_{XZ|abc}(x, z) - \frac{1}{2} P_{Z|abc}(z) \right|
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Possiamo dunque concludere sfruttando la disuguaglianza triangolare unitamente alla (4.9) ed alla (4.10) (la quantità con cui si porta a termine la

triangolazione è scelta opportunamente ed indicata con w):

$$\begin{aligned}
D(P_{Z|abcx}, P_{Z|abc}) &\leq D(P_{Z|abcx}, w) + D(w, P_{Z|abc}) \\
&= D\left(\frac{1}{2}P_{Z|abcx}, P_{X|abc}P_{Z|abcx}\right) + D\left(P_{X|abc}P_{Z|abcx}, \frac{1}{2}P_{Z|abc}\right) \\
&\equiv \underbrace{\sum_z P_{Z|abcx}(z) \left| \frac{1}{2} - P_{X|abc}(x) \right|}_{\equiv 1} \\
&\quad + \sum_z \left| P_{XZ|abc}(x, z) - \frac{1}{2}P_{Z|abc}(z) \right| \\
&\leq I_N(P_{XY|AB})
\end{aligned}$$

□

Parte III

Capitolo 5

Il teorema

5.1 Enunciato

Teorema 1. *Si denotino con A, X rispettivamente input ed output della misurazione (4.1) e sia $C \rightsquigarrow Z$ una coppia di SV che modella l'accesso ad informazioni addizionali di una potenziale estensione della teoria quantistica.*

Si suppongano valide le assunzioni QM_a, QM_b e FR . Allora vale la seguente catena di Markov:*

$$X \leftrightarrow A \leftrightarrow Z \tag{5.1}$$

5.2 Dimostrazione (stati massimamente *entangled*)

Si considerino due sistemi a due livelli massimamente *entangled*.

Su uno di essi viene operata una misurazione quantistica conforme alle assunzioni di cui sopra; se a questa si accosta l'ipotetica misurazione addizionale modellizzata dalla coppia di SV $C \rightsquigarrow Z$, sono soddisfatte le ipotesi del *Lemma 1*, dunque vale la (4.5):

$$D(P_{Z|abcx}, P_{Z|abc}) \leq I_N(P_{XY|AB}).$$

Si possono a questo punto costruire $2N$ misurazioni, parametrizzate come nella *Definizione 3.8*, tali che, per N grande, $I_N(P_{XY|AB})$ possa essere reso

*Una *catena di Markov* è una collezione di variabili aleatorie $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ che soddisfa le condizioni:

$$P(X_i | X_1, \dots, X_{i-1}) = P(X_i | X_{i-1}) \quad (\forall i \leq n) : P_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n) > 0.$$

La notazione usata per indicare la condizione di Markov è:

$$X_1 \leftrightarrow X_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow X_n.$$

piccolo ad arbitrio (si veda l'Appendice A).
 Pertanto si ha

$$D(P_{Z|abcx}, P_{Z|abc}) \leq \epsilon, \forall \epsilon > 0.$$

Di conseguenza (eliminando b con le (4.2))

$$D(P_{Z|acx}, P_{Z|ac}) \longrightarrow 0,$$

che implica, essendo la distanza variazionale una norma, che la distribuzione $P_{Z|acx}$ può essere “vicina” a piacere alla $P_{Z|ac}$. Se ne conclude che vale la catena di Markov (5.1).

Questo risultato si estende in maniera diretta a spazi di Hilbert con dimensione arbitraria applicandolo a 2^n sistemi *entangled* a due livelli.

5.3 Dimostrazione (stati arbitrari)

Per estendere la dimostrazione a stati arbitrari è intanto opportuno ridurre la misurazione (4.1) alla situazione in cui il suo *output* possa essere considerato uniformemente distribuito.

Viene mostrato come ciò sia possibile servendosi del lemma seguente.

Lemma 2. *Sia ρ_S un qualsiasi operatore densità su \mathcal{H}_S e $\epsilon > 0$.*

Per una misurazione qualunque su S , esiste una misurazione addizionale (con output \bar{X}) tale che, applicata in sequenza alla (4.1), renda la distribuzione congiunta $P_{X\bar{X}}$ distante al più ϵ da una distribuzione di probabilità uniforme.

Esempio dimostrativo. Si può esemplificare l'asserto del lemma nel seguente modo: supponiamo di avere un sistema quantistico descritto dallo stato

$$|\xi\rangle = \frac{1}{2} |0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2} |1\rangle.$$

Operando una misurazione quantistica su di esso, si hanno due possibili *outcome* con probabilità

$$P_X(0) = \frac{1}{4}, \quad P_X(1) = \frac{3}{4}.$$

Si può a questo punto aggiungere un secondo processo che lascia invariata $P_X(0)$ e *splitta* $P_X(1)$ in tre altri possibili *outcome* \bar{x}_i tali che

$$P_{X\bar{X}}(1, \bar{x}_i) = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3$$

. La distribuzione di probabilità congiunta di (X, \bar{X}) sarà allora uniforme; l'esempio è generalizzabile anche al caso di $P_X \in \mathbb{R}$ qualunque, poichè si può in questo caso approssimarla con un numero razionale, espresso come frazione di due interi, fino al grado di approssimazione voluto. \square

Sia quindi ϱ_S uno stato puro *compatibile* con la misurazione:

$$(A \rightsquigarrow (X, \bar{X}), \{E_{x,\bar{x}}^a\}_{a,x,\bar{x}}, \mathcal{H}_S),$$

per $A = \bar{a}$ fissato; siano inoltre $\{\Pi_{x,\bar{x}}\}_{x,\bar{x}}$ un sistema di proiettori mutuamente ortogonali di rango uno e $\sigma_{\text{SDR}} = \bar{\mathcal{E}}(\varrho_S)$ una mappa isometrica tali che valga la (2.5).

Per l'assunzione QM_b , si considerino le misurazioni

$$(A' \rightsquigarrow (X', \bar{X}'), \{F_{x',\bar{x}'}^{a'}\}_{a',x',\bar{x}'}, \mathcal{H}_D) : F_{x',\bar{x}'}^{\bar{a}} = \Pi_{x,\bar{x}},$$

$$(B \rightsquigarrow Y, \{Q_y^b\}_{b,y}, \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R),$$

compatibili con σ_{SDR} . Allora ogni volta che $A' = \bar{a}$, sar\`a anche $(X', \bar{X}') = (X, \bar{X})$; inoltre dalla misura su \mathcal{H}_D si ricostruisce quella su \mathcal{H}_S .

Dal momento che $P_{X'\bar{X}'}$ \`e a tutti gli effetti uniforme e che σ_{SDR} \`e puro, D dev'essere massimamente *entangled* con SR.

D'altronde, per la prima parte della dimostrazione, ci\`o implica che

$$\begin{aligned} D(P_{Z|A'=\bar{a}cx'\bar{x}'}, P_{Z|A'=\bar{a}c}) &= D(P_{Z|A'=\bar{a}cx'}, P_{Z|A'=\bar{a}c}) \\ &= D(P_{Z|A'=A=\bar{a}cx'}, P_{Z|A'=A=\bar{a}c}) \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni $\bar{a} \in \text{Rng}(A)$, stabilendo la catena di Markov desiderata:

$$X \leftrightarrow A \leftrightarrow Z.$$

Capitolo 6

Commenti conclusivi

6.1 Commenti sul teorema

Il risultato a cui si è arrivati partendo da assunzioni “minime” (QM e FR) può essere definito un *teorema di completezza* per la Teoria Quantistica.

La Teoria Quantistica si può considerare *completa*, nel senso che è *massimamente informativa* riguardo agli *outcome* sperimentali predicibili con essa.

La catena di Markov di cui al *Teorema 1* può essere anche riformulata nel seguente modo:

$$X \leftrightarrow (\psi, A) \leftrightarrow Z; \quad (6.1)$$

alla luce di questa riformulazione appare chiaro che *qualsiasi outcome “nascosto” Z non può apportare alcuna informazione che non sia già contenuta nella funzione d’onda ψ .*

Il teorema ha portata molto generale e la sua forza deriva soprattutto dalla debolezza delle ipotesi.

In particolare, le assunzioni QM sono finanche doverose da un punto di vista metodologico, dal momento che gli autori di [1] intendono interrogarsi e riflettere sull’*estendibilità* di una teoria, la quale pertanto dev’essere assunta vera.

L’unica ipotesi “extra” è l’assunzione FR , che d’altra parte è spesso inserita implicitamente nella dimostrazioni di molti risultati fisici. Questa è un’ipotesi perfettamente falsificabile: si pensi, usando la terminologia introdotta nel Capitolo 3, ad un dispositivo in grado di mostrare l’esistenza di correlazioni statistiche tra una *scelta* assunta come *libera* ed eventi cronologicamente antecedenti all’evento *trigger* (cioè precedenti al momento in cui la scelta è operata); eppure far venire meno FR , come argomenta Bell in [8], equivale a credere all’esistenza di una “congiura” da parte della natura “ai danni” dello sperimentatore.

Il *Teorema 1* implica anche che tutte le teorie a variabili nascoste fomu-

late finora (tra cui quelle citate nella Sezione 1.1), nonché qualsiasi teoria *formulabile* in maniera simile, possono essere legittimamente prese in considerazione solamente a scapito dell'assunzione *FR*.

6.2 La funzione d'onda alla luce del teorema

Nonostante la centrale importanza che ha la funzione d'onda nella comprensione del comportamento dei sistemi quantistici, non c'è ancora pieno accordo sul *significato fisico* da attribuirle.

Secondo il modello denominato in letteratura " *ψ -epistemic*", la funzione d'onda ha meramente un significato statistico; essa rifletterebbe, in forma di distribuzione di probabilità, le proprietà che emergono da parametri sottostanti al livello quantistico e quindi rispecchierebbe la nostra ignoranza riguardo a questi (situazione simile alla meccanica statistica classica).

Vi è poi il modello chiamato " *ψ -ontic*", secondo cui la funzione d'onda sarebbe una proprietà fisica dei sistemi quantistici, *oggettiva*, esattamente come *posizione e momento*; questo modello, a sua volta, si divide in due scuole di pensiero: alcuni ritengono che la funzione d'onda vada completata con una lista addizionale di parametri fisici (" *ψ -supplemented*"), altri che sia sufficiente a rendere conto in maniera completa del comportamento dei sistemi quantistici (" *ψ -complete*").

Un risultato recente (Pusey *et al.*, [10]) afferma che l'interpretazione statistica della funzione d'onda è inconsistente con le predizioni quantistiche. In particolare, stati quantistici distinti devono corrispondere a differenti stati di realtà.

In un successivo lavoro di Colbeck e Renner (vd. [11]), i due autori giungono al medesimo risultato facendo uso del teorema precedentemente dimostrato. La conclusione è che *la funzione d'onda di un sistema quantistico è completamente determinata dalle proprietà fisiche del sistema e pertanto è essa stessa una proprietà fisica del sistema*.

In Appendice B è presentata la derivazione seguita in [11] (sono assunte valide le sole ipotesi *QM* e *FR*).

La completezza della Teoria Quantistica implica, da una parte, che ogni informazione possibile rilevante ai fini delle predizioni su una misurazione è già contenuta nella funzione d'onda; dall'altra, che non esiste alcun modello " *ψ -epistemic*" consistente con l'assunzione *FR*.

Concludiamo la presente trattazione citando la chiosa degli autori al teorema presentato in [1]:

“Non soltanto l'universo non è deterministico, ma la teoria quantistica fornisce il limite ultimo a quanto esso sia predicibile.”

Appendice A

Calcolo di I_N per stati massimamente *entangled* a due livelli

Si considerino gli stati di Bell massimamente *entangled*

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_A |0\rangle_B \pm |1\rangle_A |1\rangle_B \right),$$

che descrivono un sistema a due livelli (la base ortogonale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ può rappresentare, per esempio, due stati a *spin* mutuamente paralleli).

Per misurazioni separate in maniera *spacelike* ai due siti A e B, parametrizzate secondo la *Definizione 3.8* e con operatori $\{E_x^a\}, \{F_y^b\}$, verrà ora mostrato che si possono costruire $2N$ osservabili tali che la (3.1) segua l'andamento desiderato:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} I_N \propto \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} = 0.$$

Mantenendo l'esempio dello *spin*, l'idea è di costruire $2N$ misurazioni dell'orientazione degli *spin* dei due sistemi *entangled*, ognuna "ruotata" rispetto a quella dei $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ per mezzo di una trasformazione di $SU(2)$.

Si può mostrare (come fatto nella Sezione 1.1) che una tale trasformazione lascia i due stati di Bell considerati invariati in forma, portando quindi alle stesse correlazioni tra gli stati ruotati.

Definendo il set di angoli $\vartheta_k := \frac{\pi k}{2N}$ si possono costruire gli stati:

$$|\vartheta_k^+\rangle := \cos \frac{\vartheta_k}{2} |0\rangle + \sin \frac{\vartheta_k}{2} |1\rangle,$$

$$|\vartheta_k^-\rangle := \sin \frac{\vartheta_k}{2} |0\rangle - \cos \frac{\vartheta_k}{2} |1\rangle.$$

Gli elementi delle POVM di cui alla *Definizione 3.5* sono allora

$$E_{\pm}^a := |\vartheta_a^{\pm}\rangle \langle \vartheta_a^{\pm}| \longrightarrow G_{\pm}^a = E_{\pm}^{a\dagger} E_{\pm}^a,$$

$$F_{\pm}^b := |\vartheta_b^{\pm}\rangle \langle \vartheta_b^{\pm}| \longrightarrow G_{\pm}^b = F_{\pm}^{b\dagger} F_{\pm}^b.$$

In realtà gli $\{E_{+}^a, E_{-}^a\}$ e gli $\{F_{+}^b, F_{-}^b\}$ sono, in questo caso particolare, dei *proiettori* mutuamente ortogonali; infatti si ha che:

$$|\vartheta_k^{\pm}\rangle \langle \vartheta_k^{\pm}| \cdot |\vartheta_k^{\pm}\rangle \langle \vartheta_k^{\pm}| \equiv |\vartheta_k^{\pm}\rangle \underbrace{\left(\sin^2 \frac{\vartheta_k}{2} + \cos^2 \frac{\vartheta_k}{2} \right)}_{\equiv 1, \forall k} \langle \vartheta_k^{\pm}| \equiv |\vartheta_k^{\pm}\rangle \langle \vartheta_k^{\pm}|,$$

$$|\vartheta_k^{+}\rangle \langle \vartheta_k^{+}| \cdot |\vartheta_k^{-}\rangle \langle \vartheta_k^{-}| \equiv |\vartheta_k^{+}\rangle \left(\cos \frac{\vartheta_k}{2} \sin \frac{\vartheta_k}{2} - \sin \frac{\vartheta_k}{2} \cos \frac{\vartheta_k}{2} \right) \langle \vartheta_k^{-}| = 0$$

ed anche

$$\begin{aligned} |\vartheta_{k,+}\rangle \langle \vartheta_{k,+}| + |\vartheta_{k,-}\rangle \langle \vartheta_{k,-}| &\equiv \left(\cos^2 \frac{\vartheta_k}{2} |0\rangle \langle 0| + \cos \frac{\vartheta_k}{2} \sin \frac{\vartheta_k}{2} |0\rangle \langle 1| \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{\vartheta_k}{2} \cos \frac{\vartheta_k}{2} |1\rangle \langle 0| + \sin^2 \frac{\vartheta_k}{2} |1\rangle \langle 1| \right) \\ &\quad + \left(\sin^2 \frac{\vartheta_k}{2} |0\rangle \langle 0| - \sin \frac{\vartheta_k}{2} \cos \frac{\vartheta_k}{2} |0\rangle \langle 1| \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{\vartheta_k}{2} \sin \frac{\vartheta_k}{2} |1\rangle \langle 0| + \cos^2 \frac{\vartheta_k}{2} |1\rangle \langle 1| \right) \\ &\equiv |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| = \mathbf{1}, \end{aligned}$$

come richiesto dalla (2.4).

Posti $a_0 := 0$ e $b_0 := 2N - 2$, per verificare l'andamento di I_N si devono calcolare le probabilità:

$$\begin{aligned} \bullet P(X = Y | a_0, b_0) &= \underbrace{\left| \langle \vartheta_0^{+} | \langle \vartheta_{2N-1}^{+} | \cdot | \Phi^{\pm} \rangle \right|^2}_{:= P_1^=} + \underbrace{\left| \langle \vartheta_0^{-} | \langle \vartheta_{2N-1}^{-} | \cdot | \Phi^{\pm} \rangle \right|^2}_{:= P_2^=} \\ \bullet P(X \neq Y | a, b)_{|a-b|=1} &= \underbrace{\left| \langle \vartheta_a^{+} | \langle \vartheta_{a\pm 1}^{-} | \cdot | \Phi^{\pm} \rangle \right|^2}_{:= P_1^{\neq}} + \underbrace{\left| \langle \vartheta_a^{-} | \langle \vartheta_{a\pm 1}^{+} | \cdot | \Phi^{\pm} \rangle \right|^2}_{:= P_2^{\neq}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1^= &\equiv \left| \langle 0|_A \left(\cos \frac{\vartheta_{2N-1}}{2} \langle 0|_B + \sin \frac{\vartheta_{2N-1}}{2} \langle 1|_B \right) \cdot | \Phi^{\pm} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \langle 0|_A \left(\cos \frac{\vartheta_{2N-1}}{2} |0\rangle_A \pm \sin \frac{\vartheta_{2N-1}}{2} |1\rangle_A \right) \right|^2 \\ &\equiv \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_{2N-1}}{2} \equiv \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4N} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2^- &\equiv \left| -\langle 1|_A \left(\sin \frac{\vartheta_{2N-1}}{2} \langle 0|_B - \cos \frac{\vartheta_{2N-1}}{2} \langle 1|_B \right) \cdot |\Phi^\pm\rangle \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left| -\langle 1|_A \left(\sin \frac{\vartheta_{2N-1}}{2} |0\rangle_A \mp \cos \frac{\vartheta_{2N-1}}{2} |1\rangle_A \right) \right|^2 \\
&\equiv \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\vartheta_{2N-1}}{2} \equiv \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4N} \right).
\end{aligned}$$

Usando poi l'identità trigonometrica

$$\sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha = \sin (\alpha \pm \beta)$$

si ha:

$$\begin{aligned}
P_1^\neq &\equiv \left| \left(\cos \frac{\vartheta_a}{2} \langle 0|_A + \sin \frac{\vartheta_a}{2} \langle 1|_A \right) \left(\sin \frac{\vartheta_{a\pm 1}}{2} \langle 0|_B - \cos \frac{\vartheta_{a\pm 1}}{2} \langle 1|_B \right) \cdot |\Phi^\pm\rangle \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left| \left(\cos \frac{\vartheta_a}{2} \langle 0|_A + \sin \frac{\vartheta_a}{2} \langle 1|_A \right) \left(\sin \frac{\vartheta_{a\pm 1}}{2} |0\rangle_A \mp \cos \frac{\vartheta_{a\pm 1}}{2} |1\rangle_A \right) \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left| \cos \frac{\vartheta_a}{2} \sin \frac{\vartheta_{a\pm 1}}{2} \mp \sin \frac{\vartheta_a}{2} \cos \frac{\vartheta_{a\pm 1}}{2} \right|^2 \equiv \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\vartheta_{a\pm 1} \mp \vartheta_a}{2} \\
&\equiv \frac{1}{2} \sin^2 \left[\frac{\pi}{2N} (a \pm 1 \mp a) \right] := \frac{1}{2} \sin^2 \left[\frac{\pi}{2N} (2\nu - 1) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_2^\neq &\equiv \left| \left(\sin \frac{\vartheta_a}{2} \langle 0|_A - \cos \frac{\vartheta_a}{2} \langle 1|_A \right) \left(\cos \frac{\vartheta_{a\pm 1}}{2} \langle 0|_B + \sin \frac{\vartheta_{a\pm 1}}{2} \langle 1|_B \right) \cdot |\Phi^\pm\rangle \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left| \left(\sin \frac{\vartheta_a}{2} \langle 0|_A - \cos \frac{\vartheta_a}{2} \langle 1|_A \right) \left(\cos \frac{\vartheta_{a\pm 1}}{2} |0\rangle_A \pm \sin \frac{\vartheta_{a\pm 1}}{2} |1\rangle_A \right) \right|^2 \\
&= \frac{1}{2} \left| \sin \frac{\vartheta_a}{2} \cos \frac{\vartheta_{a\pm 1}}{2} \mp \cos \frac{\vartheta_a}{2} \sin \frac{\vartheta_{a\pm 1}}{2} \right|^2 \equiv \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\vartheta_a \mp \vartheta_{a\pm 1}}{2} \\
&\equiv \frac{1}{2} \sin^2 \left[\frac{\pi}{2N} (a \pm 1 \mp a) \right] := \frac{1}{2} \sin^2 \left[\frac{\pi}{2N} (2\nu - 1) \right]
\end{aligned}$$

(è stato posto: $\nu = 1$ per $|\Phi^+\rangle$ e $\nu = a$ per $|\Phi^-\rangle$).

Allora si arriva a valutare:

$$\begin{aligned}
I_N(P_{XY|AB}) &= P_{XY|AB}(X = Y|a_0, b_0) + \sum_{\substack{a, b \\ |a-b|=1}} P(X \neq Y|a, b) \\
&= P_1^- + P_2^- \sum_{\substack{a, b \\ |a-b|=1}} (P_1^\neq + P_2^\neq) \\
&= \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4N} \right) + (2N - 2) \sin^2 \left[\frac{\pi}{2N} (2\nu - 1) \right];
\end{aligned}$$

sviluppando il seno per argomenti piccoli si conclude che

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} I_N &= \cos \frac{\pi}{2} + \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ (2N - 2) \frac{\pi^2}{4N^2} (2\nu - 1)^2 \right\} \\ &= \left(\frac{\pi^2 (2\nu - 1)^2}{2} \right) \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \\ &\propto \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} = 0.\end{aligned}$$

Appendice B

Includere la funzione d'onda nel set delle proprietà fisiche di un sistema

Consideriamo il sistema S preparato in uno stato Ψ (variabile stocastica a valori contenuti nel set di tutte le funzioni d'onda per S); con A e X verranno indicati rispettivamente gli *input* e gli *output* di una misurazione.

Sia Λ il set di tutte le informazioni disponibili in principio su S prima che sia effettuata una scelta particolare di A : $\Psi \in \Lambda$, come ovvio.

Se Z è una variabile aleatoria che rappresenta una lista delle proprietà fisiche del sistema, Z sarà detta *completa* per la descrizione di S se qualsiasi predizione possibile su X in base alle predizioni quantistiche potrà essere ottenuta da Z stessa.

Supponiamo quindi Z *completa*; di conseguenza vale

$$\Lambda \leftrightarrow (Z, A) \leftrightarrow X,$$

cioè

$$P_{X|Z=z, \Psi=\psi, A=a} = P_{X|Z=z, A=a}.$$

D'altra parte, per definizione, la (6.1) significa

$$P_{X|Z=z, \Psi=\psi, A=a} = P_{X|\Psi=\psi, A=a} \quad \forall z, \psi, a : P_{Z\Psi A}(z, \psi, a) > 0.$$

Unendo le due espressioni trovate si ottiene immediatamente

$$P_{X|\Psi=\psi, A=a} = P_{X|Z=z, A=a}, \quad (\text{B.1})$$

che vale ancora

$$\forall z, \psi, a : P_{Z\Psi A}(z, \psi, a) \stackrel{FR}{=} P_{\Psi Z}(\psi, z)P_A(a) > 0; \quad (\text{B.2})$$

ciò equivale a richiedere che $P_{\Psi Z} > 0$, $P_A > 0$. Si considerino ora, per $Z = \bar{z}$ fissato, due stati $\psi_0, \psi_1 \in \Psi$ tali da soddisfare la (B.2) per \bar{z} . Allora, per la (B.1), dovrà anche valere

$$P_{X|\Psi=\psi_0, A=a} = P_{X|Z=\bar{z}, A=a} = P_{X|\Psi=\psi_1, A=a}$$

Scegliendo un set di misurazioni per le quali $P_A(a) > 0$ (sempre possibile) e con POVM, per esempio, che contenga l'elemento $|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$, l'ultima equazione è soddisfatta solo se $\psi_0 = \psi_1$.

Pertanto per ogni $\bar{z} = Z$ il valore di Ψ è unico, cioè la funzione d'onda di S è unicamente determinata dalle proprietà fisiche del sistema.

Bibliografia

- [1] Colbeck, R. & Renner, R. No extension of quantum theory can have improved predictive power. *Nat. Commun.* 2:411 doi: 10.1038/ncomms1416 (2011).
- [2] Einstein, A., Podolsky, B. & Rosen, N. Can quantum- mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review* **47**, 777–780 (1935).
- [3] D’Ariano, G. M. Causalità di natura ontica o epistemica? Riflessioni sulla Meccanica Quantistica. In *Bollettino trimestrale dell’Associazione per l’Insegnamento della Fisica*, cap. RIFLESSIONI (2005).
- [4] Bell, J. S. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. In *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, cap. 2 (Cambridge University Press, 1987).
- [5] Bohm, D. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables. I. *Physical Review* **85**, 166–179 (1952).
- [6] Bell, J. S. De Broglie-Bohm, delayed choice double-slit experiment, and density matrix. In *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, cap. 14 (Cambridge University Press, 1987).
- [7] Leggett, A. J. Nonlocal hidden-variable theories and quantum mechanics: An incompatibility theorem. *Foundations of Physics* **33**, 1469–1493 (2003).
- [8] Bell, J. S. Free variables and local causality. In *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, cap. 12 (Cambridge University Press, 1987).
- [9] Nielsen, M., Chuang, I. *Quantum Computation and Quantum Information*, capp. 2, 8 (Cambridge University Press, 2010).
- [10] Pusey, M. F., Barrett, J. & Rudolph, T. The quantum state cannot be interpreted statistically. e-print arXiv : 1111.3328v1 (2011)

- [11] Colbeck, R. & Renner, R. Completeness of quantum theory implies that wave functions are physical properties. e-print [arXiv : 1111.6597v1](https://arxiv.org/abs/1111.6597v1) (2011)