

**Università degli Studi di Pavia**

---

**Dipartimento di Fisica Generale 'Alessandro Volta'**

**Dottorato di Ricerca in Fisica – VII Ciclo**

**Amplificazione Quantistica  
della Radiazione Elettromagnetica**

Tesi di Dottorato di  
**Chiara Macchiavello**

Tutore: **Prof. Giacomo Mauro D'Ariano**

Coordinatore: **Prof. Sergio P. Ratti**

Anno Accademico 1993/1994

---

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Concetti introduttivi</b>	<b>7</b>
1.1 Stati coerenti e stati “squeezed” della radiazione . . . . .	7
1.2 Funzioni di Wigner . . . . .	11
1.3 Rivelazione omodina . . . . .	13
1.4 Rivelazione eterodina . . . . .	14
<b>2 Amplificatori lineari</b>	<b>17</b>
2.1 Guadagno e figura di rumore . . . . .	17
2.2 Amplificatori lineari: descrizione generale . . . . .	19
2.3 Attenuatore lineare . . . . .	23
2.4 Amplificatore parametrico phase insensitive . . . . .	26
2.5 Amplificatore a mezzo attivo . . . . .	31
2.6 Amplificatore phase sensitive . . . . .	35
2.7 Preamplificatori . . . . .	39
<b>3 Amplificazione e duplicazione in processi parametrici trilineari</b>	<b>43</b>
3.1 Amplificatore numero ideale . . . . .	43
3.2 Duplicatore numero ideale . . . . .	47
3.3 Processi parametrici trilineari: caratteristiche generali . . . . .	49
3.4 Generazione di seconda/sub-armonica . . . . .	52
3.5 Generazione di frequenze somma e differenza . . . . .	58
3.6 Tempo di conversione in un’approssimazione di campo medio . . . . .	60
<b>4 Amplificatori saturabili</b>	<b>64</b>
4.1 Simulazione Monte Carlo dell’equazione di Fokker-Planck . . . . .	64

4.2	Applicazione a un modello unidimensionale di TWA	70
4.3	Applicazione all'equazione di Van Der Pol	73
4.4	Amplificazione al di sotto del limite quantico	78
<b>5</b>	<b>Informazione quantistica in canali di comunicazione lineari</b>	<b>88</b>
5.1	Canali di comunicazione quantistici	89
5.2	Rivelazione non efficiente	94
5.3	Equazioni di evoluzione per un sistema lineare aperto	95
5.4	Figura di rumore e informazione mutua	100
5.5	Master equation per amplificatori lineari	106
5.6	Informazione mutua con perdite di linea	110
5.7	Amplificazione mediante feedback	112
	<b>Conclusioni</b>	<b>115</b>
	<b>Appendici</b>	<b>118</b>
A.1	Stati coerenti e stati "squeezed" della radiazione	118
A.2	Funzioni di Wigner	121
A.3	Rivelazione omodina	123
A.4	Rivelazione eterodina	124
	<b>Bibliografia</b>	<b>126</b>

# Introduzione

Negli ultimi vent'anni si è assistito ad un progresso senza precedenti, in termini di riduzione dei costi e delle dimensioni, nella realizzazione di dispositivi ottici quantistici, di qualità e funzionalità sempre più ampie. Sono oggi prodotti su scala industriale laser monocromatici ad alta stabilità, fotodiodi ad alta efficienza quantica, fibre ottiche monomodali a bassa attenuazione. A partire dalla fine degli anni Ottanta, in particolare, l'introduzione delle fibre ottiche ha determinato un'accelerazione repentina delle prestazioni nel campo delle telecomunicazioni. Grazie alla bassa attenuazione, alla elevata banda di trasmissione, all'ingombro ridotto e all'assenza di problemi di interferenza, queste nuove tecnologie stanno soppiantando i tradizionali sistemi a cavo coassiale, ed è opinione comune che rappresentino l'immediato futuro delle telecomunicazioni su brevi e lunghe distanze.

Un elemento fondamentale per l'affermazione di queste nuove tecnologie è rappresentato dall'efficienza dell'amplificazione del segnale: la ricerca sta puntando verso soluzioni a frequenze ottiche, in grado di trattare il segnale a livello omogeneo con quello impiegato per la trasmissione. L'amplificatore ottico è l'innovazione che permette nei sistemi di comunicazione di eliminare gli elementi di discontinuità costituiti dai dispositivi di conversione elettro-ottici dei segnali: esso porterà certamente un contributo sostanziale per rendere realtà il miraggio di una rete di telecomunicazione completamente trasparente e priva di perdite, aprendo anche la strada verso nuovi metodi di manipolazione diretta del segnale a frequenza ottica, con implicazioni interessanti per altri orizzonti applicativi (sistemi di commutazione, calcolatori ottici).

Nelle reti di comunicazione il ruolo dell'amplificatore consiste essenzialmente nel compensare perdite di diverso genere, in particolare perdite di linea, che attenuano il segnale durante la fase di trasmissione, perdite introdotte dalle derivazioni

della linea allo scopo di portare il segnale a più utenti, nonché perdite legate alle inefficienze degli apparati di misura allo stadio di ricezione dei segnali. L'amplificatore deve essere progettato in modo da disturbare il meno possibile il segnale trasmesso; la scelta del tipo di amplificazione più adatto dipende fortemente dall'intera configurazione del canale di comunicazione, in particolare dal tipo di codifica, di modulazione e di rivelazione dei segnali. Nel caso specifico delle frequenze ottiche diventa rilevante la natura quantistica della radiazione, che allo stato della tecnologia attuale rimane la maggiore fonte di disturbo nei sistemi di comunicazione e in molte altre applicazioni ottico-quantistiche.

In questa tesi viene condotta un'analisi dell'amplificazione della radiazione elettromagnetica al limite ideale di funzionamento in cui il rumore aggiunto dall'amplificatore sia di natura puramente quantistica e quindi intrinseco al processo di amplificazione stesso. Non vengono prese in considerazione sorgenti di rumore classiche legate alle apparecchiature sperimentali—e quindi in linea di principio eliminabili— nè fluttuazioni di tipo termico introdotte dall'interazione del sistema con l'ambiente esterno, che alle frequenze ottiche sono del tutto trascurabili rispetto a quelle quantistiche.

In questo lavoro vengono evidenziati, a livello teorico e fondamentale, i limiti al rumore aggiunto nel processo di amplificazione quantistica in regimi di funzionamento sia lineari sia altamente non lineari. Vengono individuate le condizioni in cui l'inserimento di un amplificatore, scelto opportunamente in base alle caratteristiche del canale di comunicazione considerato, può portare ad un miglioramento delle prestazioni del canale stesso sia in termini di rapporto segnale-disturbo che di informazione trasmessa. Viene inoltre presentato uno studio approfondito degli effetti del rumore quantistico in presenza di meccanismi di saturazione della popolazione atomica coinvolta nell'interazione con la radiazione incidente. Nell'ambito di questa analisi viene proposto uno schema realistico di amplificatore ottico che, in opportuni regimi di funzionamento, porta ad una sensibile riduzione del rumore associato all'emissione spontanea presente nel dispositivo e si avvicina al limite di funzionamento ideale dettato dalle leggi della meccanica quantistica, superando ampiamente il limite standard quantistico degli usuali amplificatori lineari. Viene anche analizzato il processo di duplicazione per stati numero della radiazione. Tale processo ha risvolti di grande interesse nelle reti di comunicazione ottiche, in quanto rappresenta un "rubinetto ottico" privo di perdite, nelle misure quantistiche non demolitive e nell'interferometria.

Questa tesi è articolata in cinque capitoli. Il primo capitolo ha carattere puramen-

te introduttivo: vengono brevemente richiamate alcune nozioni di base nel campo dell'ottica quantistica necessarie per permettere al lettore non particolarmente esperto di comprendere i problemi trattati nella tesi.

Nel secondo capitolo, dopo l'esposizione dei concetti introduttivi al funzionamento di un amplificatore ottico quantistico, viene esaminato in dettaglio il processo di amplificazione lineare in meccanica quantistica, con particolare evidenza alle ragioni che portano all'introduzione di una "porta" addizionale non prevista nell'ambito della fisica classica, responsabile di "rumore aggiunto" di natura puramente quantistica. Vengono inoltre analizzati dettagliatamente il processo di attenuazione lineare e i principali tipi di amplificatore lineare—l'amplificatore parametrico "phase insensitive", l'amplificatore a mezzo attivo e l'amplificatore "phase sensitive"—e viene discusso in particolare il limite quantico alla figura di rumore in regime lineare. Vengono infine analizzate le prestazioni degli amplificatori lineari utilizzati come preamplificatori.

Il terzo capitolo è dedicato ad una estesa analisi dei processi di amplificazione e duplicazione del numero di fotoni in processi parametrici trilineari totalmente quantistici, con un confronto con le prestazioni degli amplificatori lineari. Questa analisi è motivata dal fatto che i processi parametrici trilineari corrispondono a dispositivi ottici realizzabili nella pratica, e nello stesso tempo rappresentano le più immediate approssimazioni alle Hamiltoniane che descrivono amplificatori e duplicatori ideali nel numero di fotoni.

Il quarto capitolo è dedicato allo studio del funzionamento di amplificatori ottici saturabili in un approccio basato su equazioni di Fokker-Planck. Viene presentato un metodo di simulazione Monte Carlo delle equazioni di Fokker-Planck in ottica quantistica, sviluppato appositamente per studiare la dinamica completa di sistemi ottici in presenza di effetti altamente non lineari quali quelli legati ai meccanismi di saturazione della popolazione atomica coinvolta nell'interazione con la radiazione incidente. Come accennato in precedenza, viene quindi proposto uno schema di amplificazione basato su amplificatori a laser che, in virtù dei meccanismi di saturazione, consente di ridurre sensibilmente le fluttuazioni del segnale in uscita e di ottenere prestazioni di gran lunga superiori rispetto agli amplificatori lineari. Si dimostra così che il limite quantico alla figura di rumore degli amplificatori "phase insensitive" lineari in rivelazione diretta può essere ampiamente superato scegliendo in modo opportuno i parametri di funzionamento dell'amplificatore in esame.

Nel quinto capitolo è presentata un'analisi dettagliata di canali di comunicazione

quantistici non ottimizzati, in presenza cioè di perdite lungo la linea di trasmissione e inefficienze allo stadio di rivelazione. L'analisi è volta soprattutto ad individuare le condizioni in cui l'inserimento di un opportuno amplificatore ottico conduce ad un miglioramento delle prestazioni del canale stesso in termini di figura di rumore e di quantità di informazione trasmessa.

# Capitolo 1

## Concetti introduttivi

In questo capitolo, di carattere puramente introduttivo, vengono brevemente richiamate alcune nozioni di base nel campo dell'ottica quantistica necessarie per permettere al lettore non particolarmente esperto di comprendere i problemi trattati nei capitoli successivi. In particolare, vengono richiamati i concetti di stati coerenti e “squeezed” della radiazione elettromagnetica e le funzioni di Wigner. Vengono inoltre descritti due tipi di rivelazione molto comuni nelle applicazioni: la rivelazione omodina e la rivelazione eterodina. Questo capitolo non ha nessuna pretesa di completezza: per maggiori e più dettagliate informazioni si rimanda dunque a testi di carattere specialistico, tra cui [55] e [65].

### 1.1 Stati coerenti e stati “squeezed” della radiazione

Gli stati coerenti sono stati originariamente introdotti da Glauber per descrivere l'alto grado di coerenza della luce laser. La coerenza ottica massima corrisponde alla fattorizzazione a tutti gli ordini delle funzioni di Green normalmente ordinate del campo elettrico e si ottiene quando lo stato della radiazione è un autostato della componente a frequenza positiva del campo. Il campo elettrico quantizzato in descrizione di Heisenberg è dato dalla relazione

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

dove le componenti a frequenza positiva  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  e negativa  $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t)$  assumono la forma

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{l\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 v}} \mathbf{e}_{l\sigma} a_{l\sigma} e^{i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} \quad (1.2)$$

$$\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = -i \sum_{l\sigma} \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\epsilon_0 v}} \mathbf{e}_{l\sigma} a_{l\sigma}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - \omega_l t)} . \quad (1.3)$$

Nelle (1.2) e (1.3)  $\mathbf{e}_{l\sigma}$  rappresenta il vettore di polarizzazione e gli operatori bosonici  $a_{l\sigma}$ , che corrispondono ai modi del campo, rappresentano oscillatori indipendenti ( $[a_{l\sigma}, a_{l'\sigma'}^\dagger] = \delta_{ll'} \delta_{\sigma\sigma'}$ ).

Per un singolo modo del campo corrispondente all'operatore di distruzione  $a$ , uno stato coerente  $|\alpha\rangle$  soddisfa l'equazione agli autovalori

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle , \quad (1.4)$$

dove  $\alpha$  è un numero complesso. Lo stato coerente  $|\alpha\rangle$  può essere ottenuto a partire dallo stato di vuoto  $|0\rangle$  come segue

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle , \quad (1.5)$$

dove l'operatore  $\hat{D}(\alpha)$  è definito

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) . \quad (1.6)$$

L'operatore  $\hat{D}(\alpha)$  è detto “di spostamento” perchè agisce sull'operatore  $a$  come una traslazione

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) a \hat{D}(\alpha) = a + \alpha . \quad (1.7)$$

Si può verificare facilmente che gli stati coerenti sono stati a minima indeterminazione per qualsiasi coppia di quadrature coniugate del campo, ovvero

$$\langle \Delta a_\phi^2 \rangle \langle \Delta a_{\phi+\pi/2}^2 \rangle = \frac{1}{16} , \quad (1.8)$$

dove per definizione la quadratura del campo a fase  $\phi$  è data da

$$a_\phi = \frac{1}{2} (a e^{-i\phi} + a^\dagger e^{i\phi}) . \quad (1.9)$$

In particolare

$$\langle \Delta a_\phi^2 \rangle = \frac{1}{4} , \quad (1.10)$$

cioè le fluttuazioni del campo sono isotrope (indipendenti dalla fase). L’espressione (A.6) è valida anche per lo stato di vuoto, sebbene i valori medi delle quadrature siano nulli: anch’esso è quindi sede di fluttuazioni quantistiche. Gli stati coerenti hanno dunque le stesse fluttuazioni del vuoto, mentre il valore medio è traslato come segue

$$\langle a_\phi \rangle = \alpha_\phi = \frac{1}{2} (\alpha e^{i\phi} + \alpha^* e^{-i\phi}) . \quad (1.11)$$

La decomposizione degli stati coerenti sulla base degli stati numero è data da

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle , \quad (1.12)$$

e la distribuzione di probabilità nella rappresentazione numero è la distribuzione di Poisson

$$p(n) \equiv |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} . \quad (1.13)$$

Per uno stato coerente il valor medio e la varianza del numero di fotoni assumono lo stesso valore

$$\langle \alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = \langle \alpha|\Delta\hat{n}^2|\alpha\rangle = |\alpha|^2 . \quad (1.14)$$

Per caratterizzare la distribuzione di probabilità nel numero di fotoni di uno stato si introduce la quantità

$$F = \frac{\langle \Delta\hat{n}^2 \rangle}{\langle \hat{n} \rangle} , \quad (1.15)$$

detta fattore di Fano. Per la distribuzione di Poisson si ha  $F = 1$ , mentre vengono generalmente detti “subpoissoniani” gli stati con  $F < 1$  e “superpoissoniani” quelli con  $F > 1$ .

Consideriamo ora il caso degli stati “squeezed”. Essi sono per definizione stati in cui

$$\langle \Delta a_{\phi'}^2 \rangle < \frac{1}{4} \quad (1.16)$$

per almeno un valore  $\phi'$  della fase, cioè sono caratterizzati da fluttuazioni in quadratura anisotrope in fase e inferiori a quelle coerenti per alcuni valori di fase  $\phi'$ . Nel corso di questa tesi verranno presi in considerazione soltanto i cosiddetti “stati squeezed a due fotoni” [80]. Essi sono stati a minima indeterminazione (vale

cioè la (A.5)) e si costruiscono traslando lo stato di vuoto “squeezed”, ovvero lo stato con  $\langle a \rangle = 0$  (ma con valor medio di fotoni  $\langle \hat{n} \rangle > 0$ ) e  $\langle \Delta a_\phi^2 \rangle = f(\phi)$

$$|\alpha, \zeta\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle. \quad (1.17)$$

Nell’ eq. (A.13)  $\hat{S}(\zeta)$  indica l’operatore di squeezing

$$\hat{S}(\zeta) = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\zeta(a^\dagger)^2 - \zeta^*a^2\right)\right]. \quad (1.18)$$

Tale operatore agisce sull’operatore di distruzione  $a$  nel modo seguente

$$\hat{S}^\dagger(\zeta)a\hat{S}(\zeta) = \mu a + \nu a^\dagger, \quad (1.19)$$

dove

$$\mu = \cosh \rho, \quad \nu = e^{2i\psi} \sinh \rho, \quad \zeta = \rho e^{2i\psi}. \quad (1.20)$$

Per esempio, per  $\zeta = r \in R, r \geq 0$  si ha

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \alpha \\ \langle \Delta a_0^2 \rangle &= \frac{1}{4}|\mu + \nu|^2 = \frac{1}{4}e^{2r} \\ \langle \Delta a_{\pi/2}^2 \rangle &= \frac{1}{4}|\mu - \nu|^2 = \frac{1}{4}e^{-2r}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Dalla (A.17) è evidente come le fluttuazioni in quadratura vengano ridotte per una quadratura e amplificate per quella coniugata rispetto alle fluttuazioni di uno stato coerente, mentre il prodotto rimane quello di indeterminazione minima.

Gli stati squeezed hanno un numero medio di fotoni maggiore dello stato coerente da cui sono stati ottenuti. Tale numero medio è dato da

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 + |\nu|^2. \quad (1.22)$$

I fotoni  $|\nu|^2$  in eccesso rispetto allo stato coerente corrispondente sono detti fotoni di squeezing. Analogamente al caso delle fluttuazioni in quadratura, anche le fluttuazioni del numero di fotoni risultano dipendenti dalla fase di  $\zeta$  (detta anche “direzione di squeezing”), infatti

$$\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle = 2|\mu\nu|^2 + |\mu\alpha + \nu\alpha^*|^2. \quad (1.23)$$

La distribuzione di probabilità del numero dunque, diversamente da quella degli stati coerenti, non è poissoniana.

## 1.2 Funzioni di Wigner

Gli stati coerenti sono un insieme non ortogonale “over-completo” di stati, per i quali vale la relazione

$$\int_C \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{1} . \quad (1.24)$$

Una conseguenza interessante di questa proprietà è che qualsiasi operatore può essere rappresentato in modo completo dagli elementi di matrice diagonali tra stati coerenti. La funzione seguente genera infatti tutti gli elementi di matrice dell'operatore considerato nella rappresentazione numero

$$f(\hat{O}) \equiv \langle\alpha|\hat{O}|\alpha\rangle \exp |\alpha|^2 = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*m}\alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|\hat{O}|n\rangle , \quad (1.25)$$

nel senso che gli elementi di matrice nella rappresentazione numero sono dati da

$$\langle m|\hat{O}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \frac{\partial}{\partial\alpha^{*m}} \frac{\partial}{\partial\alpha^n} f(\hat{O}) \Big|_{\alpha=\alpha^*=0} . \quad (1.26)$$

Un'altra conseguenza dell'over-completezza degli stati coerenti è la possibilità di poter realizzare rappresentazioni coerenti della matrice densità non equivalenti tra loro. Ad esempio, per un generico stato quantistico della radiazione la matrice densità può essere scritta come decomposizione sugli stati coerenti nel modo seguente

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha| , \quad (1.27)$$

dove  $P(\alpha, \alpha^*)$  è detta funzione di Glauber-Sudarshan o semplicemente funzione  $P$  e

$$\int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) = 1 . \quad (1.28)$$

La funzione  $P$  non è in generale definita positiva, ma è una quasi-probabilità. Per stati coerenti è una funzione delta di Dirac, mentre per stati numero è una sovrapposizione di derivate della funzione delta. Gli stati che hanno una rappresentazione  $P$  singolare, come ad esempio gli stati numero, sono comunemente chiamati non classici.

La funzione di Husimi (o funzione  $Q$ ), definita come segue

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle \quad (1.29)$$

è invece definita positiva ed è anch'essa normalizzata

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} Q(\alpha, \alpha^*) = 1. \quad (1.30)$$

Essa rappresenta pertanto una vera distribuzione di probabilità. Non può comunque essere interpretata come probabilità che il sistema si trovi nello stato coerente  $|\alpha\rangle$ , perchè gli stati coerenti non sono ortogonali.

Le funzioni  $P$  e  $Q$  sono generatrici dei momenti ordinati in modo normale e anti-normale rispettivamente, ovvero

$$\text{Tr}(\hat{\rho} a^{\dagger n} a^m) = \int P(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*n} \alpha^m d^2\alpha, \quad (1.31)$$

$$\text{Tr}(\hat{\rho} a^m a^{\dagger n}) = \int Q(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*n} \alpha^m \frac{d^2\alpha}{\pi}. \quad (1.32)$$

Si possono definire più in generale delle quasi-probabilità (funzioni di Wigner) nel modo seguente

$$W_s(\alpha, \alpha^*) = \int X_s(\lambda, \lambda^*) \exp(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda) \frac{d^2\lambda}{\pi}, \quad (1.33)$$

trasformate di Fourier della funzione caratteristica

$$X_s(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(\lambda a^\dagger - \lambda^* a)] \exp\left(\frac{1}{2}s|\lambda|^2\right). \quad (1.34)$$

La (A.29) è funzione generatrice dei momenti  $s$ -ordinati

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\hat{\rho} \{a^{\dagger n} a^m\}_s] &= \left. \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{\partial^m}{\partial (-\lambda^*)^m} \right|_{\lambda=0} X_s(\lambda, \lambda^*) \\ &= \int W_s(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*n} \alpha^m \frac{d^2\alpha}{\pi}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Le funzioni  $P$  e  $Q$  si ottengono come casi particolari della (A.28), infatti

$$W_1(\alpha, \alpha^*) = \pi P(\alpha, \alpha^*), \quad W_{-1}(\alpha, \alpha^*) = Q(\alpha, \alpha^*). \quad (1.36)$$

Il caso relativo ad  $s = 0$  corrisponde invece alla funzione generatrice dei prodotti simmetrizzati. In tal caso la distribuzione di probabilità  $W_0(\alpha, \alpha^*)$  è definita positiva soltanto per stati coerenti e squeezed e assume in tal caso forma gaussiana.

Per passare da un'equazione operatoriale di evoluzione per la matrice densità (master equation) a un'equazione di evoluzione per le distribuzioni di probabilità

$W_s(\alpha, \alpha^*)$  è sufficiente tener presente le seguenti relazioni

$$\frac{\partial D_s(\lambda, \lambda^*)}{\partial \lambda} = \left[ \frac{1}{2}(s-1)\lambda^* + a^\dagger \right] D_s(\lambda, \lambda^*), \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial D_s(\lambda, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} = \left[ \frac{1}{2}(s+1)\lambda - a \right] D_s(\lambda, \lambda^*), \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial D_s(\lambda, \lambda^*)}{\partial \lambda} = D_s(\lambda, \lambda^*) \left[ \frac{1}{2}(s+1)\lambda + a^\dagger \right], \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial D_s(\lambda, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} = D_s(\lambda, \lambda^*) \left[ \frac{1}{2}(s-1)\lambda - a \right], \quad (1.40)$$

dove

$$D_s(\lambda, \lambda^*) \equiv \exp \left( \lambda a^\dagger - \lambda^* a + \frac{1}{2}s|\lambda|^2 \right). \quad (1.41)$$

Sfruttando queste relazioni e tenendo presenti le definizioni (A.28) e (A.29), si ottengono facilmente le regole di moltiplicazione date in Tab. 5.1 del capitolo 5, che come vedremo sono fondamentali per passare da una master equation per la matrice densità a un'equazione di Fokker-Planck per una funzione di Wigner.

### 1.3 Rivelazione omodina

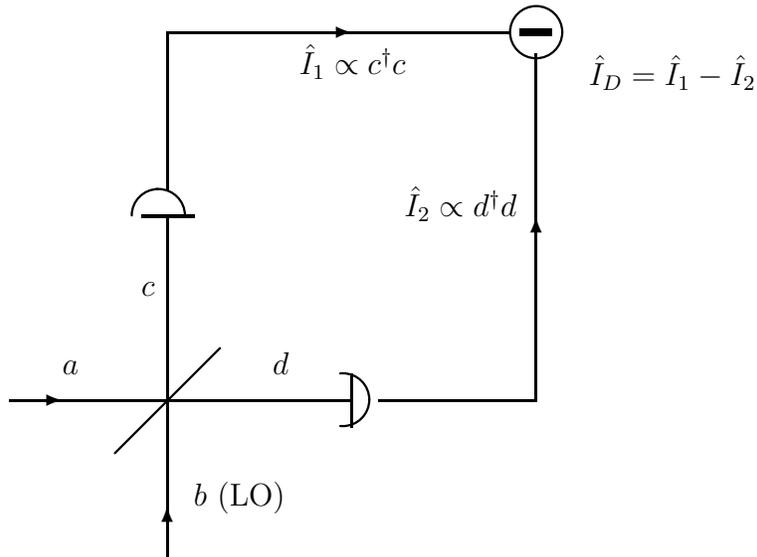


Figura 1.1: Schema di un rivelatore omodina.

Un rivelatore omodina, mostrato in figura A.1, misura una quadratura del campo. Esso è costituito essenzialmente da un beam splitter bilanciato (con trasmissività pari a  $1/2$ ), descritto dettagliatamente nel paragrafo 2.3, e due fotorivelatori. I due modi incidenti all'ingresso del beam splitter sono il modo di segnale  $a$  e un oscillatore locale intenso  $b$  alla stessa frequenza del modo  $a$ , che può essere trattato classicamente. Allo stadio finale viene misurata la differenza tra le correnti elettriche rivelate dai due fotocontatori, ovvero

$$\hat{I}_D = c^\dagger c - d^\dagger d . \quad (1.42)$$

Utilizzando le relazioni di trasformazione dei campi per un beam splitter, date nei paragrafi 2.2 e 2.3, la corrente differenza  $I_D$  assume la forma

$$\hat{I}_D = a^\dagger b + b^\dagger a . \quad (1.43)$$

Tenendo presente che l'oscillatore locale si trova in uno stato coerente  $|z\rangle$  molto eccitato il valor medio è dato da

$$\langle \hat{I}_D \rangle = z \langle a^\dagger \rangle + z^* \langle a \rangle , \quad (1.44)$$

dove  $z = |z|e^{i\phi}$  e  $\phi$  rappresenta lo sfasamento rispetto al modo  $a$ . Si può calcolare la corrente ridotta

$$\hat{i} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} (2|z|)^{-1} \hat{I}_D , \quad (1.45)$$

il cui valore medio e le corrispondenti fluttuazioni sono dati da

$$\langle \hat{i} \rangle = \frac{1}{2} \langle a^\dagger e^{-i\phi} + a e^{i\phi} \rangle \equiv \langle a_\phi \rangle \quad (1.46)$$

$$\langle \Delta \hat{i}^2 \rangle = \langle \Delta a_\phi^2 \rangle + \mathcal{O}(|z|^{-2}) . \quad (1.47)$$

Misurando tale corrente si misura allora la quadratura del campo.

## 1.4 Rivelazione eterodina

Lo schema di un rivelatore eterodina è mostrato in figura A.2 e misura l'ampiezza complessa del campo incidente  $\hat{\mathbf{E}}_S$  attraverso la misura di due quadrature coniugate [89]. Il campo in ingresso  $\hat{\mathbf{E}}_{IN}$  ha un segnale alla frequenza  $\omega_S$ , mentre

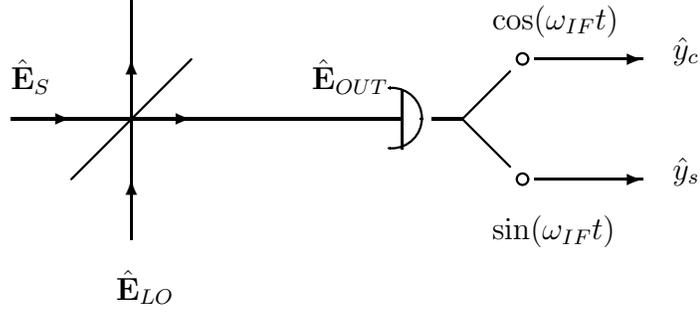


Figura 1.2: Schema di un rivelatore eterodina.

l'oscillatore locale funziona a una frequenza diversa  $\omega_0$ . La corrente in uscita è data dal prodotto normalmente ordinato dei campi [55] ed assume la forma

$$\hat{I}_{OUT}(t) = \hat{\mathbf{E}}_{OUT}^{(-)}(t) \hat{\mathbf{E}}_{OUT}^{(+)}(t), \quad (1.48)$$

dove  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$  e  $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$  rappresentano le componenti del campo elettrico a frequenza positiva e negativa rispettivamente. Il fotodiodo in uscita misura la corrente alla frequenza  $\omega_{IF} = \omega_S - \omega_0$ , data da

$$\hat{I}_{OUT}(\omega_{IF}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\mathbf{E}}_{OUT}^{(-)}(\omega + \omega_{IF}) \cdot \hat{\mathbf{E}}_{OUT}^{(+)}(\omega). \quad (1.49)$$

Il campo all'uscita del beam splitter è dato dalla relazione

$$\hat{\mathbf{E}}_{OUT}^{(+)} = \eta^{1/2} \hat{\mathbf{E}}_S^{(+)} + (1 - \eta)^{1/2} \hat{\mathbf{E}}_{LO}^{(+)}, \quad (1.50)$$

e le componenti dei campi che contribuiscono nel calcolo della (A.43) sono

$$\hat{\mathbf{E}}_S^{(+)}(t) \propto a_s e^{i(\omega_0 + \omega_{IF})t} + a_i e^{i(\omega_0 - \omega_{IF})t} \quad (1.51)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{LO}^{(+)}(t) \propto b_l e^{i\omega_0 t} + b_i e^{i(\omega_0 - \omega_{IF})t} + b_s e^{i(\omega_0 + \omega_{IF})t}, \quad (1.52)$$

dove gli indici  $s, i, l$  indicano rispettivamente le componenti del campo alla frequenza di segnale ( $\omega_S$ ), alla frequenza “immagine” ( $\omega_0 - \omega_{IF}$ ) e alla frequenza dell'oscillatore locale ( $\omega_0$ ). Tenendo presente che  $b_l$  si trova in uno stato coerente  $|z\rangle$  molto eccitato e che  $\langle a_i \rangle = \langle b_i \rangle = \langle b_s \rangle = 0$ , si calcola la corrente ridotta

$$\hat{i} = \lim_{\eta \rightarrow 1, |z| \rightarrow \infty, \gamma = \text{cost.}} \gamma^{-1} \hat{I}_{OUT}(\omega_{IF}) \quad (1.53)$$

con

$$\gamma = \eta^{1/2}(1 - \eta)^{1/2}|z|. \quad (1.54)$$

Le componenti “seno” e “coseno” di tale corrente sono date da

$$\hat{i}_c = \text{Re} \hat{i} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{i}(t) \cos \omega t = \frac{1}{2} (\hat{i} + \hat{i}^\dagger) \quad (1.55)$$

$$\hat{i}_s = \text{Im} \hat{i} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{i}(t) \sin \omega t = \frac{1}{2i} (\hat{i} - \hat{i}^\dagger) \quad (1.56)$$

e assumono la forma

$$\langle \hat{i}_c \rangle = \frac{1}{2} \langle a_s^\dagger e^{-i\phi} + a_s e^{i\phi} \rangle \equiv \langle a_{s\phi} \rangle \quad (1.57)$$

$$\langle \hat{i}_s \rangle = \frac{1}{2i} \langle a_s^\dagger e^{-i\phi} - a_s e^{i\phi} \rangle \equiv \langle a_{s\phi+\pi/2} \rangle \quad (1.58)$$

$$\langle \Delta \hat{i}_c^2 \rangle = \langle \Delta a_{s\phi}^2 \rangle + \langle \Delta a_{i\phi}^2 \rangle \quad (1.59)$$

$$\langle \Delta \hat{i}_s^2 \rangle = \langle \Delta a_{s\phi+\pi/2}^2 \rangle + \langle \Delta a_{i\phi+\pi/2}^2 \rangle. \quad (1.60)$$

Il rivelatore eterodina misura perciò due quadrature coniugate del campo simultaneamente o, equivalentemente, misura l'ampiezza complessa del campo.

# Capitolo 2

## Amplificatori lineari

In questo capitolo vengono esposti i concetti introduttivi al funzionamento di un amplificatore ottico quantistico, in particolare i concetti di guadagno e di figura di rumore, che verranno largamente richiamati nel corso di questo lavoro di tesi. Viene poi analizzato in modo dettagliato il processo di amplificazione lineare in meccanica quantistica e si evidenzia in particolare la necessità di introdurre una porta addizionale (in genere non utilizzata) nella descrizione dell'amplificatore quantistico, non prevista nell'ambito della fisica classica. L'introduzione di questa porta addizionale è responsabile di "rumore aggiunto" di natura puramente quantistica e quindi ineliminabile nelle applicazioni pratiche.

Vengono analizzati il processo di attenuazione lineare e i principali tipi di amplificatore lineare: l'amplificatore parametrico "phase insensitive", l'amplificatore a mezzo attivo e l'amplificatore "phase sensitive". Viene ricavato e discusso in particolare il limite quantico alla figura di rumore in regime lineare. In conclusione del capitolo vengono analizzate le prestazioni degli amplificatori lineari utilizzati come preamplificatori e si mostra in particolare come la scelta del tipo di amplificatore più adatto dipenda dal tipo di rivelazione considerato.

### 2.1 Guadagno e figura di rumore

I parametri più significativi che descrivono il funzionamento di un amplificatore ottico sono il guadagno e la figura di rumore.

Il guadagno è per definizione il rapporto tra il segnale in uscita e quello in ingresso,

ovvero

$$G = \frac{\mathcal{S}_{out}}{\mathcal{S}_{in}} . \quad (2.1)$$

Per segnale si intende il valor medio di un'osservabile prefissata  $\hat{O}$  rispetto a uno stato di riferimento. Per definire il segnale è necessario dunque stabilire prima il tipo di modulazione che si intende utilizzare. Per modulazione on-off ad esempio il riferimento è rappresentato dallo stato di vuoto e il segnale è dunque dato da

$$\mathcal{S} = \langle \hat{O} \rangle_{on} - \langle \hat{O} \rangle_{off} , \quad (2.2)$$

dove  $\langle \hat{O} \rangle_{on}$  e  $\langle \hat{O} \rangle_{off}$  rappresentano i valori di aspettazione di  $\hat{O}$  nei rispettivi stati di ingresso. Nel calcolo del segnale all'uscita dell'amplificatore è quindi di fondamentale importanza valutare correttamente il valore di aspettazione che l'osservabile in esame assume all'uscita del dispositivo in assenza di segnale all'ingresso, cioè l'evoluzione dello stato di vuoto nel processo di amplificazione (tale evoluzione in generale è non nulla).

La figura di rumore è definita come segue

$$R = \frac{(\mathcal{S}^2/\mathcal{N})_{in}}{(\mathcal{S}^2/\mathcal{N})_{out}} \quad (2.3)$$

e quantifica la degradazione del rapporto segnale-disturbo  $SNR \equiv \mathcal{S}^2/\mathcal{N}$  nel processo di amplificazione.  $\mathcal{N}$  rappresenta appunto il rumore e viene definito in base al tipo di modulazione considerata. Per modulazione on-off, essendo lo stato in presenza di segnale e il vuoto a priori equiprobabili, il rumore assume la forma

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} \left( \langle \Delta \hat{O}^2 \rangle_{on} + \langle \Delta \hat{O}^2 \rangle_{off} \right) , \quad (2.4)$$

dove  $\langle \Delta \hat{O}^2 \rangle \equiv \langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2$  indica le fluttuazioni quantistiche dell'osservabile considerata. In questo lavoro di tesi viene analizzato soltanto il rumore di natura puramente quantistica della radiazione: non vengono prese in considerazione sorgenti di rumore classiche legate alle apparecchiature sperimentali–e quindi in linea di principio eliminabili– nè fluttuazioni di tipo termico introdotte dall'interazione del sistema con l'ambiente esterno, che alle frequenze ottiche sono del tutto trascurabili rispetto a quelle quantistiche. In questo lavoro di tesi inoltre, se non altrimenti specificato, verrà considerato sempre il caso di modulazione on-off. Nel capitolo 5 il concetto di figura di rumore verrà generalizzato al caso di alfabeto di dimensione arbitraria con modulazione qualsiasi.

Il segnale e la figura di rumore dipendono in generale, oltre che dallo stato in ingresso, dal tipo di osservabile considerata e quindi dal tipo di rivelazione effettuata sulla radiazione all'uscita dell'amplificatore. Gli schemi di rivelazione ordinariamente utilizzati nelle reti di comunicazione ottiche sono:

- i)* rivelazione diretta (rivelazione del numero di fotoni),
- ii)* rivelazione omodina (rivelazione di una quadratura del campo, descritta nel paragrafo A.3),
- iii)* rivelazione eterodina (rivelazione di due quadrature coniugate, dalle quali si risale al valore dell'ampiezza complessa del campo, descritta nel paragrafo A.4).

Nelle condizioni ottimali di funzionamento l'amplificatore produce il guadagno desiderato con la minore figura di rumore possibile. La figura di rumore minima raggiungibile da un qualsiasi dispositivo è unitaria: se così non fosse si avrebbe infatti un aumento dell'informazione trasmessa lungo il canale considerato. Un amplificatore ideale è dunque caratterizzato da un guadagno indipendente dal segnale in ingresso e da figura di rumore unitaria. Nel capitolo 5 verrà dimostrato che figure di rumore minori dell'unità sono possibili soltanto in presenza di rivelatori inefficienti.

In questo lavoro di tesi è stata condotta un'analisi a banda stretta e indipendente dalla polarizzazione del campo. Sono stati cioè considerati soltanto campi incidenti monomodali, descritti quantisticamente dall'operatore di creazione  $a$  alla frequenza considerata.

## 2.2 Amplificatori lineari: descrizione generale

Un amplificatore lineare rispetto ad un'osservabile prefissata è per definizione un dispositivo in cui il guadagno è indipendente dal segnale di ingresso, o equivalentemente il valore di aspettazione dell'osservabile sullo stato di uscita è legato a quello relativo allo stato di ingresso da una relazione di tipo lineare.

Classicamente un amplificatore lineare di campo ideale è descritto, indipendentemente dal particolare meccanismo di amplificazione in atto, dalla seguente relazione tra i valori medi

$$\langle A \rangle = G^{1/2} \langle a \rangle, \quad (2.5)$$

con guadagno  $G > 1$  e senza aggiunta di rumore. Il guadagno  $G$  in realtà compare come radice quadrata nella (2.5) perchè in genere viene definito rispetto alla potenza (proporzionale a  $\langle a^\dagger a \rangle$ ) e non all'ampiezza del campo. Nell'eq. (2.5)  $a$  e  $A$  rappresentano i modi del campo all'ingresso e all'uscita dell'amplificatore rispettivamente.

La relazione (2.5) non ha però un analogo quantistico immediato. Essa non può infatti essere tradotta quantisticamente nella forma

$$A = G^{1/2}a \quad (2.6)$$

perchè in questo modo si violerebbero le regole di commutazione bosoniche dei campi

$$[A, A^\dagger] = [a, a^\dagger] = 1 . \quad (2.7)$$

Per soddisfare la condizione di linearità (2.5) e le regole di commutazione è necessario introdurre un ulteriore operatore  $b$ , detto anche modo "idler", tale che

$$[b, b^\dagger] = 1 , \quad (2.8)$$

$$[a, b] = [a, b^\dagger] = 0 . \quad (2.9)$$

Come vedremo più in dettaglio nei prossimi paragrafi l'introduzione di questo secondo modo, necessario per una descrizione quantistica di un amplificatore ottico, è responsabile di un inevitabile rumore additivo intrinseco al processo di amplificazione.

Le relazioni di trasformazione lineare più generali che legano il campo in uscita  $A$  ai due campi in ingresso  $a$  e  $b$  sono del tipo

$$A = ma + nb \quad (2.10)$$

oppure

$$A = \mu a + \nu b^\dagger , \quad (2.11)$$

con coefficienti  $m, n, \mu, \nu$  in generale complessi. La condizione  $[A, A^\dagger] = 1$  implica i seguenti vincoli sui coefficienti

$$|m|^2 + |n|^2 = 1 , \quad (2.12)$$

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1, \quad (2.13)$$

quindi  $|m|^2 \leq 1$  e  $|\mu|^2 \geq 1$ . La trasformazione (2.10) descrive allora un processo di attenuazione (o perdita), mentre la trasformazione (2.11) si riferisce a un vero e proprio processo di amplificazione (con guadagno maggiore di 1). Per semplicità d'ora in avanti ci limiteremo a considerare i coefficienti  $m, n, \mu, \nu$  reali, senza per questo perdere in generalità. Eventuali fattori di fase possono infatti essere direttamente inclusi nella definizione dei campi secondo le trasformazioni

$$a \rightarrow e^{i\phi'} a, \quad b \rightarrow e^{i\phi''} b, \quad (2.14)$$

che fisicamente corrispondono soltanto a cambiare la lunghezza del cammino ottico dell'onda incidente prima che entri nell'amplificatore e che conservano le relazioni di commutazione bosoniche. In letteratura in genere vengono indicati con  $\eta$  il coefficiente di attenuazione e con  $G$  il guadagno in intensità nei casi di perdita e di amplificazione rispettivamente e le relazioni (2.10) e (2.11) assumono la forma

$$A = \eta^{1/2} a + (1 - \eta)^{1/2} b, \quad (2.15)$$

$$A = G^{1/2} a + (G - 1)^{1/2} b^\dagger. \quad (2.16)$$

Come conseguenza dell'unitarietà e della linearità del processo di amplificazione (e attenuazione), l'inversione delle relazioni (2.15) e (2.16) richiede l'introduzione di un ulteriore campo bosonico in uscita  $B$  che commuti con  $A$  e che sia combinazione lineare di  $a$  e  $b$  (o  $b^\dagger$ ). Imponendo allora le condizioni

$$[B, B^\dagger] = 1, \quad (2.17)$$

$$[A, B] = [A, B^\dagger] = 0 \quad (2.18)$$

e considerando combinazioni lineari con coefficienti reali, si ottiene

$$B = -(1 - \eta)^{1/2} a + \eta^{1/2} b, \quad (2.19)$$

oppure

$$B = (G - 1)^{1/2} a^\dagger + G^{1/2} b. \quad (2.20)$$

Le relazioni inverse sono date da:

$$a = \eta^{1/2}A - (1 - \eta)^{1/2}B \quad (2.21)$$

$$b = (1 - \eta)^{1/2}A + \eta^{1/2}B \quad (2.22)$$

nel caso della perdita e

$$a = G^{1/2}A - (G - 1)^{1/2}B^\dagger \quad (2.23)$$

$$b = -(G - 1)^{1/2}A^\dagger + G^{1/2}B \quad (2.24)$$

nel caso di amplificazione. Si noti che le trasformazioni inverse non corrispondono alle equazioni di evoluzioni relative al guadagno inverso.

A causa dell'introduzione del modo  $b$ , privo di analogo classico, l'amplificatore quantistico viene rappresentato schematicamente come un dispositivo a quattro porte, a differenza della descrizione classica a due porte (Fig. 2.1).

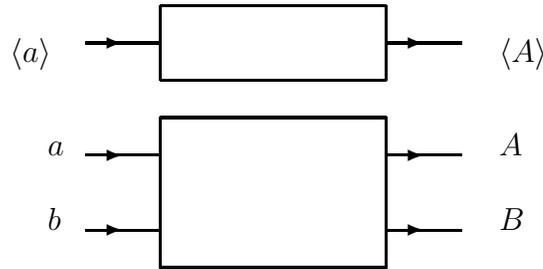


Figura 2.1: Schema dell'amplificatore lineare classico (in alto) e quantistico (in basso).

Essendo le trasformazioni (2.10), (2.12), (2.11) e (2.13) unitarie, si possono scrivere in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{U}^\dagger \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \hat{U}, \quad (2.25)$$

dove l'operatore  $U$  è dato da

$$\hat{U} = \exp \left[ \arctan \sqrt{\frac{1 - \eta}{\eta}} (a^\dagger b - ab^\dagger) \right] \quad (2.26)$$

nel caso di attenuazione e

$$\hat{U} = \exp \left[ \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{G-1}{G}} (a^\dagger b^\dagger - ab) \right] \quad (2.27)$$

nel caso di amplificazione.

## 2.3 Attenuatore lineare

Come è stato visto nel paragrafo precedente, il processo di attenuazione lineare è descritto dalle trasformazioni dei campi (2.15) e (2.19). Esso corrisponde fisicamente a qualsiasi tipo di perdita lineare (dispersione) legata alla propagazione di un segnale in una linea di trasmissione, come ad esempio una fibra ottica, e può essere originata da svariati fenomeni fisici (quali ad esempio fenomeni di assorbimento, di scattering, di diffrazione), che influenzano il segnale fino allo stadio di rivelazione. Le stesse trasformazioni descrivono anche il funzionamento del “beam splitter”, o divisore di potenza ottico, realizzabile fisicamente con un semplice specchio semitrasparente di trasmissività  $\eta$ , rappresentato schematicamente in Fig. 2.2. In questa configurazione la seconda porta in ingresso non

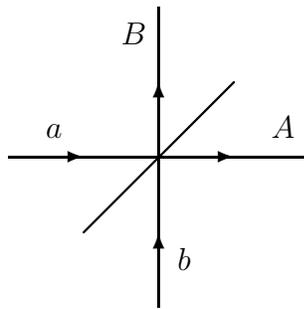


Figura 2.2: Schema dell'attenuatore lineare quantistico

viene utilizzata e quindi il modo  $b$  si trova nello stato di vuoto. Lo schema 2.2 e i risultati esposti in questo paragrafo sono quindi validi sia per un beam splitter sia per un generico processo di attenuazione lineare.

Sfruttando la (2.26) si può calcolare facilmente l'evoluzione di uno stato in ingresso del tipo  $|n\rangle|0\rangle$ , cioè con uno stato numero con  $n$  fotoni nel modo  $a$  e il

vuoto nel modo  $b$ :

$$\hat{U}|n\rangle|0\rangle = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p}^{1/2} [-(1-\eta)^{1/2}]^p \eta^{(n-p)/2} |n-p\rangle|p\rangle. \quad (2.28)$$

A partire da questa relazione si può ottenere la probabilità di trovare  $k$  fotoni nel modo  $A$  dato un generico stato in ingresso  $\hat{\rho} \otimes |0\rangle\langle 0|$

$$\begin{aligned} P_k &= \text{Tr} \left( \hat{U}(\hat{\rho} \otimes |0\rangle\langle 0|) \hat{U}^\dagger |k\rangle\langle k| \otimes \hat{1} \right) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \rho_{nn} \binom{n}{k} (1-\eta)^{n-k} \eta^k, \end{aligned} \quad (2.29)$$

che corrisponde a una diffusione di Bernoulli dei fotoni tra le due porte di uscita. Tale probabilità coincide con quella di un fotocontatore con efficienza quantica  $\eta$  [55]. Un fotocontatore reale può quindi essere schematizzato con un beam splitter di trasmissività  $\eta$  seguito da un rivelatore ideale con efficienza quantica unitaria. Questo risultato verrà ampiamente utilizzato nel capitolo 5 per analizzare le prestazioni di un canale di comunicazione quantistico in presenza di rivelatori inefficienti.

Consideriamo ora il caso di rivelazione diretta nella configurazione con il modo  $b$  nello stato di vuoto e vediamo come il segnale viene degradato durante il processo di attenuazione. Il segnale in uscita è dato da

$$\langle \hat{n}_A \rangle \equiv \langle A^\dagger A \rangle = \eta \langle \hat{n}_a \rangle, \quad (2.30)$$

viene cioè attenuato di un fattore  $\eta$ . Le fluttuazioni del segnale in uscita assumono la forma

$$\langle \Delta \hat{n}_A^2 \rangle = \eta^2 \langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle + \eta(1-\eta) \langle \hat{n}_a \rangle, \quad (2.31)$$

sono cioè caratterizzate da un primo termine che scala esattamente le fluttuazioni in ingresso secondo il fattore  $\eta^2$  e da un secondo termine di rumore, proveniente dall'interazione del segnale in ingresso con il modo idler e comunemente detto rumore aggiunto, perchè in assenza di questo la figura di rumore sarebbe ideale (unitaria). Come si vede chiaramente da questo esempio, il rumore aggiunto è privo di analogo classico: è una peculiarità del mondo quantistico originata dall'introduzione della seconda porta  $b$  non utilizzata in ingresso. Tale rumore è quindi di natura intrinseca al sistema e non può essere eliminato in alcun modo nelle applicazioni pratiche.

La figura di rumore è data da

$$\mathcal{R} \equiv \frac{SNR_{n_a}}{SNR_{n_A}} = 1 + \frac{1 - \eta}{\eta F_a}, \quad (2.32)$$

dove  $F_a \equiv \langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle / \langle \hat{n}_a \rangle$  è il fattore di Fano del segnale in ingresso. Come si osserva dalla (2.32), la figura di rumore non è mai ideale, tende al limite ideale soltanto nel caso di segnali fortemente super-poissoniani (con fattore di Fano  $\gg 1$ ), cioè molto disturbati in partenza e quindi di scarso interesse pratico. Per un beam splitter bilanciato ( $\eta = 1/2$ ) e per segnali coerenti in ingresso ( $F_a = 1$ ),  $\mathcal{R} = 2$  (corrispondente a 3 decibel).

Il fattore di Fano in uscita assume la forma

$$F_A = F_a \eta \left( 1 + \frac{1 - \eta}{F_a \eta} \right). \quad (2.33)$$

Consideriamo ora il caso di rivelazione omodina. Assumendo che il modo  $b$  sia nello stato di vuoto “squeezed”, il segnale in uscita (rappresentato dalla componente in quadratura  $A_\phi$ ) è dato da

$$\langle A_\phi \rangle^2 = \eta \langle a_\phi \rangle^2, \quad (2.34)$$

cioè anche in questo caso è perfettamente attenuato secondo un fattore  $\eta$ , e le fluttuazioni assumono la forma

$$\langle \Delta A_\phi^2 \rangle = \eta \langle \Delta a_\phi^2 \rangle + (1 - \eta) \langle \Delta b_\phi^2 \rangle. \quad (2.35)$$

Anche in questo caso le fluttuazioni non scalano esattamente con  $\eta$ , ma c'è un termine additivo di rumore originato dalle fluttuazioni del modo  $b$ . Come si può osservare dalla (2.35), se il modo  $b$  è in uno stato di vuoto “squeezed”, in condizioni opportune anche il campo in uscita può risultare “squeezed”.

La figura di rumore in rivelazione omodina assume la forma

$$\frac{SNR_{a_\phi}}{SNR_{A_\phi}} = 1 + 2 \frac{1 - \eta}{\eta} \frac{\langle \Delta b_\phi^2 \rangle}{\langle \Delta a_\phi^2 \rangle + 1/4}. \quad (2.36)$$

Il termine  $1/4$  a denominatore deriva dal fatto che in modulazione on-off il rumore viene calcolato come media delle fluttuazioni del segnale e dello stato di vuoto, come espresso dalla relazione (2.4). Anche in in questo caso la figura di rumore non è mai ideale, ma può essere migliorata usando un vuoto “squeezed” opportuno, in modo da ridurre le fluttuazioni del modo  $b$  nella quadratura considerata. Il grado di squeezing comunque non può essere diminuito a piacere. I

fotoni di squeezing in  $b$  infatti, anche se non alterano il valore di aspettazione della quadratura in uscita, aumentano le fluttuazioni nella quadratura coniugata a fase  $\phi + \frac{\pi}{2}$  e possono saturare la potenza massima tollerata nei canali di uscita. Si noti che il meccanismo di attenuazione lineare tende a degradare le caratteristiche puramente quantistiche della radiazione rendendola classica. Come si vede infatti dalle relazioni (2.33) e (2.35), quando  $b$  è nello stato di vuoto, per un qualsiasi stato in ingresso si ottiene

$$F_A \rightarrow 1, \quad \langle \Delta A_\phi^2 \rangle \rightarrow 1/4 \quad (2.37)$$

per  $\eta \rightarrow 0$ , caratteristiche di uno stato coerente.

Dal punto di vista applicativo, il beam splitter è il più semplice dispositivo che permette la condivisione di un segnale e si presta pertanto ad essere utilizzato come “rubinetto ottico” nelle reti di comunicazione, in cui i segnali trasmessi devono in generale essere condivisi da più utenti. Ad ogni derivazione di utente però l’informazione deve essere rilevata senza attenuare eccessivamente il segnale lasciato a disposizione degli utenti successivi e limitando il più possibile l’introduzione di rumore lungo la rete. A questo scopo, come vedremo nel paragrafo 2.7, è utile anteporre in serie al beam splitter un preamplificatore, opportunamente scelto a seconda del tipo di rivelazione effettuata in uscita e tale da amplificare il segnale e ridurre allo stesso tempo le figure di rumore (2.32) e (2.36).

## 2.4 Amplificatore parametrico phase insensitive

L’amplificatore lineare “phase insensitive” (PIA) è descritto dalle trasformazioni dei campi (2.16) e (2.20). In rivelazione omodina il segnale in uscita è dato da

$$\langle A_\phi \rangle^2 = G \langle a_\phi \rangle^2, \quad (2.38)$$

cioè le quadrature del campo vengono amplificate con un guadagno indipendente dalla fase (da qui il nome “phase insensitive”). Considerando il caso generale in cui il modo  $b$  è nello stato di vuoto “squeezed”, le fluttuazioni corrispondenti assumono la forma

$$\langle \Delta A_\phi^2 \rangle = G \langle \Delta a_\phi^2 \rangle + (G - 1) \langle \Delta b_\phi^2 \rangle. \quad (2.39)$$

Come si può osservare, per guadagni sufficientemente elevati l’amplificatore lineare phase insensitive degrada qualsiasi grado di squeezing del segnale entrante.

In particolare, il valore limite del guadagno al di sopra del quale lo stato in uscita possiede fluttuazioni in quadratura maggiori di quelle coerenti è dato da

$$G_l = \frac{1/4 + \langle \Delta b_\phi^2 \rangle}{\langle \Delta a_\phi^2 \rangle + \langle \Delta b_\phi^2 \rangle}. \quad (2.40)$$

Sfruttando l'equazione (2.39) si ottiene la figura di rumore

$$R = 1 + 2 \frac{G-1}{G} \frac{\langle \Delta b_\phi^2 \rangle}{\langle \Delta a_\phi^2 \rangle + 1/4}. \quad (2.41)$$

Analogamente al caso dell'attenuatore, le fluttuazioni del modo idler  $b$  introducono del rumore additivo privo di analogo classico, che comporta inevitabilmente una degradazione del rapporto segnale-disturbo all'interno del dispositivo. Anche in questo caso la figura di rumore può essere migliorata aumentando opportunamente il grado di "squeezing" del modo idler e valgono a questo proposito considerazioni analoghe a quelle del paragrafo precedente.

Per quanto riguarda il caso di rivelazione diretta, il numero medio di fotoni in uscita è dato da

$$\langle n_A \rangle = G \langle n_a \rangle + (G-1) \langle n_b + 1 \rangle. \quad (2.42)$$

Oltre al segnale di entrata amplificato, nel numero medio in uscita compare un contributo costante, indipendente dal segnale in ingresso e non nullo anche nel caso di idler vuoto. Questo termine dà luogo a un valor medio del numero di fotoni in uscita non nullo anche se nell'amplificatore non viene immesso alcun segnale ed è chiamato quindi "amplificazione spontanea parametrica". L'amplificazione spontanea parametrica è pertanto un fenomeno tipicamente quantistico, legato all'introduzione del modo idler nella descrizione dell'amplificatore lineare. Le fluttuazioni nel numero di fotoni in uscita sono date dalla seguente espressione

$$\begin{aligned} \langle \Delta n_A^2 \rangle = & \underbrace{G \langle n_a \rangle}_{(1)} + \underbrace{(G-1) \langle n_b + 1 \rangle}_{(2)} + \underbrace{2G(G-1) \langle n_a \rangle \langle n_b + 1 \rangle}_{(3)} \\ & + \underbrace{(G-1)^2 \langle 2n_b + 1 \rangle}_{(4)} + \underbrace{G^2 \langle n_a \rangle (F_a - 1)}_{(5)} + \underbrace{(G-1)^2 \langle n_b \rangle (F_b - 1)}_{(6)} + \text{t.n.d.}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

dove t.n.d. indica la presenza di termini non diagonali nella rappresentazione numero, del tipo  $\langle a^2 \rangle \langle b^2 \rangle$ . A parte questi termini di coerenza, il rumore in uscita è somma di sei contributi, qualitativamente diversi, dovuti a:

- 1) fluttuazioni quantistiche generate dal segnale di ingresso amplificato;

- 2) fluttuazioni quantistiche generate dall'emissione spontanea parametrica amplificata (APSE);
- 3) interferenza quantistica tra il segnale di ingresso amplificato e APSE;
- 4) interferenza dell'APSE con se stessa;
- 5) fluttuazioni in eccesso (rispetto a un segnale poissoniano, cioè con fattore di Fano unitario) del segnale in ingresso;
- 6) fluttuazioni in eccesso del modo idler.

Nelle condizioni di miglior funzionamento dell'amplificatore, cioè con il modo idler vuoto, guadagni elevati ( $G \gg 1$ ) e segnali in ingresso molto intensi ( $\langle n_a \rangle \gg 1$ ), la figura di rumore diventa

$$R \simeq 1 + \frac{G - 1}{GF_a} . \quad (2.44)$$

In realtà nel limite di guadagni elevati la (2.44) si riduce a

$$R \simeq 1 + \frac{1}{F_a} , \quad (2.45)$$

ma la forma (2.44) consente un collegamento utile con il caso dell'attenuatore. Sostituendo infatti al guadagno  $G$  il coefficiente di attenuazione  $\eta$ , l'espressione (2.44) è analoga al caso dell'attenuatore. Valgono dunque le stesse considerazioni del paragrafo precedente, riguardanti in particolare la possibilità di ottenere figure di rumore molto vicine al valore unitario ideale soltanto per stati fortemente super-poissoniani. Per stati coerenti (o in generale poissoniani) in ingresso si ottiene  $R = 3\text{dB}$ , che rappresenta il valore minimo alla figura di rumore chiamato usualmente "limite quantistico dell'amplificatore lineare". Tale valore minimo, di natura strettamente quantistica, è dovuto in particolare al termine 3), ovvero all'interferenza tra le fluttuazioni del segnale di ingresso e quelle del modo idler. Il fattore di Fano in uscita assume la forma

$$F_A = F_a G \left( 1 + \frac{G - 1}{GF_a} \right) . \quad (2.46)$$

Come si può osservare dalla (2.16), i valori medi di  $a$  e  $a^2$  scalano in modo esatto con  $G^{1/2}$  e  $G$  rispettivamente. Il PIA è pertanto un amplificatore ideale in rivelazione eterodina. Il caso di rivelazione eterodina richiede però un'analisi più approfondita in quanto viene rivelata un'osservabile a valori complessi e verrà studiato in modo appropriato nel capitolo 5.

Si noti che i risultati sin qui mostrati in questo paragrafo, e in particolare il limite quantistico dell'amplificatore, sono stati ricavati in base alle sole condizioni di

linearità e di unitarietà delle equazioni di evoluzione dei campi; sono quindi indipendenti dai dettagli e dalle modalità del particolare processo di amplificazione considerato.

Vediamo ora come si può realizzare praticamente un amplificatore phase insensitive. Abbiamo visto nel paragrafo 2.2 che l'operatore di evoluzione dei campi è dato dall'espressione (2.27). Essendo tale trasformazione unitaria e indipendente dal tempo, possiamo interpretarla come operatore di evoluzione Hamiltoniano nello schema di interazione. La Hamiltoniana di interazione in questo schema è quindi data dall'argomento dell'esponenziale della (2.27), ovvero

$$H_I = ik(a^\dagger b^\dagger - ab) . \quad (2.47)$$

La costante di accoppiamento  $k$  è legata al guadagno e al tempo di interazione  $\tau$  (o equivalentemente alla lunghezza del dispositivo  $L = v\tau$ , dove  $v$  è la velocità della luce nel materiale di cui è costituito il dispositivo stesso) dalla relazione [82]

$$G = \cosh^2(\tau k) . \quad (2.48)$$

Si noti che tale Hamiltoniana, in una trattazione completamente quantistica, violerebbe il principio di conservazione dell'energia, in quanto descrive la creazione simultanea di un fotone nel modo  $a$  e di un fotone nel modo  $b$ . È necessario allora introdurre, come si vedrà nel seguito, un modo di pompa classico che fornisca l'energia necessaria al processo di amplificazione. Considerando l'Hamiltoniana di evoluzione libera dei campi  $a$  e  $b$

$$H_0 = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b , \quad (2.49)$$

l'Hamiltoniana di interazione nello schema di Schrödinger diventa esplicitamente dipendente dal tempo e assume la forma

$$\hat{H}_I = k \left( a^\dagger b^\dagger e^{-i(\omega t + \phi)} + ab e^{i(\omega t + \phi)} \right) , \quad (2.50)$$

dove  $\omega = \omega_a + \omega_b$ . Il termine oscillante è compensato da un terzo modo della radiazione  $c$  posto in uno stato coerente molto eccitato (un modo di pompa classico appunto) a frequenza  $\omega$ . Supponendo che il modo di pompa  $c$  rimanga costante in intensità per tutta la durata dell'interazione con i modi  $a$  e  $b$ , si può sostituire l'operatore  $c$  con il corrispondente autovalore

$$c \rightarrow \sqrt{I_c} e^{i(\omega t + \phi)} , \quad (2.51)$$

dove  $I_c$  rappresenta l'intensità della radiazione classica. L'Hamiltoniana (2.50) deriva allora dall'interazione di tre modi

$$\hat{H}_I = \kappa (a^\dagger b^\dagger c + abc^\dagger), \quad (2.52)$$

dove le costanti di accoppiamento  $k$  e  $\kappa$  sono legate dalla relazione  $k = \sqrt{I_c} \kappa$ . L'amplificatore phase insensitive è dunque in pratica un dispositivo a sei porte: come mostrato in Fig. 2.3 è realizzabile con due porte quantistiche e una classica sia all'ingresso che all'uscita.

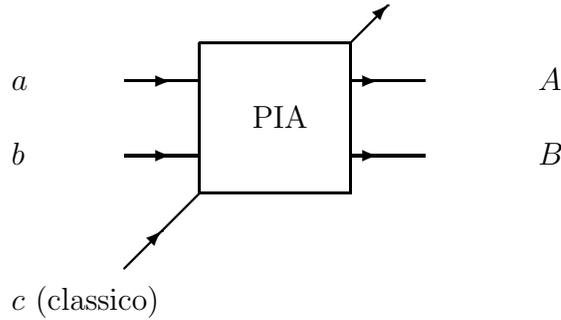


Figura 2.3: Schema di un amplificatore phase insensitive

L'Hamiltoniana (2.52) si può ottenere sfruttando processi ottici non lineari, in particolare utilizzando materiali con suscettività non lineare del second'ordine  $\chi^{(2)}$  (detti anche miscelatori a tre onde). Infatti l'interazione tra un mezzo di questo tipo e il campo elettrico  $\vec{E}$  è descritta dall'Hamiltoniana

$$H_I = -\vec{P} \cdot \vec{E}, \quad (2.53)$$

dove in geometria unidimensionale la polarizzazione  $P$  assume la forma

$$P = \chi E + \chi^{(2)} E^2. \quad (2.54)$$

La Hamiltoniana (2.53) tradotta quantisticamente contiene tutte le combinazioni trilineari dei campi  $a$ ,  $b$  e  $c$  e hermitiani coniugati. Trascurando i termini del tipo  $abc$ ,  $ab^\dagger c$ , ecc., che sono fuori risonanza e quindi fortemente oscillanti (approssimazione d'onda rotante), si ottiene proprio l'Hamiltoniana (2.52) con  $\kappa = \chi^{(2)}$ . Materiali ad alta suscettività  $\chi^{(2)}$  si possono ottenere usando cristalli  $KTP$  (ad esempio il fosfato di potassio e titanile  $KTiOPO_4$ ) o strutture a quantum well del tipo  $GaAs/GaAlAs$ .

Un altro modo per realizzare amplificatori phase insensitive è quello di utilizzare materiali con suscettività non lineare del terzo ordine  $\chi^{(3)}$  (detti anche miscelatori a quattro onde), caratterizzati dall'Hamiltoniana di interazione

$$\hat{H}_I = \kappa \left( a^\dagger b^\dagger c d + a b c^\dagger d^\dagger \right) . \quad (2.55)$$

Nel caso in cui i modi  $c$  e  $d$  sono degeneri, tale Hamiltoniana assume la forma

$$\hat{H}_I = \kappa \left( a^\dagger b^\dagger c^2 + a b (c^\dagger)^2 \right) \quad (2.56)$$

e si riduce all'Hamiltoniana dell'amplificatore phase insensitive (2.52) se si considera il modo  $c$  come pompa classica a frequenza  $\omega_c = (\omega_a + \omega_b)/2$ . L'uso di materiali con suscettività del terzo ordine può essere più conveniente nelle applicazioni pratiche perchè il contributo al second'ordine della suscettività  $\chi^{(2)}$  è sempre zero nel caso di simmetria cubica e quindi materiali con elevata suscettività  $\chi^{(3)}$  sono più comunemente disponibili.

Concludiamo questo paragrafo con una precisazione: l'amplificatore phase insensitive appena descritto è detto anche parametrico. Il termine parametrico indica quei processi in cui sono coinvolte soltanto eccitazioni non risonanti fra livelli energetici del mezzo, mentre i processi che comportano transizioni in risonanza con le frequenze caratteristiche del mezzo considerato sono detti non parametrici [7]. Per quanto riguarda i processi parametrici l'Hamiltoniana effettiva di interazione è descritta da operatori bosonici, come appunto nel caso dell'amplificatore phase insensitive in esame. I processi non parametrici invece coinvolgono anche gradi di libertà fermionici, per descrivere ad esempio i livelli di eccitazione atomici. Esempi di processi non parametrici sono la transizione laser, lo scattering Raman stimolato e gli amplificatori a fibra attiva, che vedremo più in dettaglio nel prossimo paragrafo.

## 2.5 Amplificatore a mezzo attivo

Analizziamo in questo paragrafo gli amplificatori a mezzo attivo, in particolare l'amplificatore a fibra attiva. Questo tipo di amplificatore è di grande interesse nelle reti di telecomunicazione ottiche perchè permette di sostenere il segnale che si propaga lungo la fibra senza dover convertire il segnale ottico in corrente elettrica, come succede invece negli amplificatori elettronici tradizionali. Un amplificatore a fibra attiva è costituito essenzialmente da un pezzo di fibra ottica

(realizzato con vetri silicati o del tipo ZBLAN), il cui nucleo contiene un drogante attivo, usualmente costituito da ioni di terre rare [3]. Attraverso un'opportuna procedura di pompaggio si realizza un'inversione di popolazione tra i livelli elettronici degli ioni droganti con frequenza di transizione pari alla frequenza del segnale trasmesso. Quando la radiazione attraversa la fibra drogata viene così amplificata per effetto dell'emissione stimolata negli ioni droganti.

Una trattazione completa dell'amplificatore a mezzo attivo—ed in particolare dell'amplificatore a fibra ottica drogata—non può prescindere dal dettaglio dell'interazione fra i vari modi quantizzati di pompa e di segnale con i livelli atomici coinvolti (almeno tre) dello ione attivo drogante. Un'analisi accurata dovrebbe anche tener conto di fenomeni di saturazione nell'amplificazione del segnale, nonché dei meccanismi di svuotamento e perdita che coinvolgono il modo di pompa stesso. Per semplificare la trattazione prendiamo in considerazione solamente i due livelli ionici coinvolti nell'amplificazione del segnale, mentre il processo di pompaggio è tenuto in conto unicamente imponendo un'inversione di popolazione costante lungo la fibra. Inoltre, come nei casi precedenti, trattiamo solo il caso monomodale, in una semplice analisi a banda molto stretta nella quale si intende che i fotoni coinvolti nell'interazione con gli ioni attivi siano tutti quelli presenti nella banda di transizione fra i due livelli.

Anche questo tipo di amplificatore è phase insensitive, cioè amplifica il campo indipendentemente dalla fase (v. capitolo 5).

Il modello più semplice, mostrato in Fig. 2.4, è basato su un'equazione di bilancio energetico—detta 'rate equation'—per i fotoni interagenti con un insieme di atomi a due livelli e descrive il processo di amplificazione in regime lineare (valido per segnali deboli in ingresso).

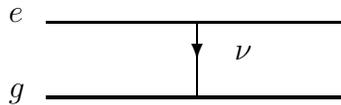


Figura 2.4: Schema di amplificatore a mezzo attivo a due livelli

Assumendo un sistema di riferimento cartesiano con asse  $z$  coincidente con la direzione di propagazione del segnale e indicando con  $P_n(z)$  la probabilità di trovare  $n$  fotoni alla frequenza di transizione  $\nu$  tra i due livelli e alla sezione  $z$

della fibra, la ‘rate equation’ si scrive come segue [57]

$$\begin{aligned} \partial_z P_n(z) = & \sigma_a N_g (n+1) P_{n+1}(z) + \sigma_e N_e n P_{n-1}(z) \\ & - \sigma_a N_g n P_n(z) - \sigma_e N_e (n+1) P_n(z) , \end{aligned} \quad (2.57)$$

dove  $\sigma_e$  e  $\sigma_a$  indicano le sezioni d’urto di emissione e assorbimento, e  $N_e$  e  $N_g$  la densità di popolazione dei livelli eccitato e fondamentale.

In questo semplice modello di “rate equation” è possibile soltanto un’analisi in rivelazione diretta. Dalla (2.57) si possono calcolare facilmente i momenti della distribuzione del numero di fotoni. Per il valor medio e il secondo momento si ottengono le seguenti equazioni

$$\partial_z \langle n \rangle_z = (\sigma_e N_e - \sigma_a N_g) \langle n \rangle_z + \sigma_e N_e , \quad (2.58)$$

$$\partial_z \langle n^2 \rangle_z = 2(\sigma_e N_e - \sigma_a N_g) \langle n^2 \rangle_z + (\sigma_a N_g + 3\sigma_e N_e) \langle n \rangle_z + \sigma_e N_e . \quad (2.59)$$

La semplicità del modello adottato è rispecchiata dal fatto che si ottengono equazioni chiuse per momenti di ogni ordine. In trattazioni più sofisticate—che tengono ad esempio conto di fenomeni di saturazione—questo vantaggio non sussiste, e per ogni momento della distribuzione si ricava un’equazione differenziale che coinvolge anche momenti di ordine più alto (si veda ad esempio Ref. [73]). Integrando la (2.58) e la (2.59) e assumendo che l’amplificatore abbia lunghezza  $L$ , si ottengono le seguenti espressioni per il numero medio e la varianza all’uscita del dispositivo

$$\langle n \rangle_o = G \langle n \rangle_i + (G - 1)P , \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \langle \Delta n^2 \rangle_o = & G \langle n \rangle_i + (G - 1)P + 2G(G - 1)P \langle n \rangle_i \\ & + (G - 1)^2 P^2 + G^2 (F_i - 1) \langle n \rangle_i , \end{aligned} \quad (2.61)$$

dove

$$G = \exp[L(\sigma_e N_e - \sigma_a N_g)] , \quad P = \sigma_e N_e / (\sigma_e N_e - \sigma_a N_g) \quad (2.62)$$

rappresentano rispettivamente il guadagno e il fattore di emissione spontanea,  $n_i$  rappresenta il numero medio di fotoni del segnale in entrata e  $F_i$  è il fattore di Fano dello stato in ingresso.

La relazione (2.60) mostra come il segnale in uscita sia costituito dalla sovrapposizione di due contributi: il primo rappresenta la componente coerente dovuta al segnale amplificato mentre il secondo è dato dalla componente incoerente legata alla presenza dell'emissione spontanea locale, soggetta anch'essa ad amplificazione all'interno del dispositivo.

Il rumore in uscita è invece somma di cinque termini, dovuti rispettivamente a:

- 1) fluttuazioni quantistiche del segnale amplificato;
- 2) amplificazione dell'emissione spontanea (ASE);
- 3) interferenza quantistica tra ASE e segnale amplificato;
- 4) interferenza quantistica dell'ASE con se stessa;
- 5) fluttuazioni in eccesso del segnale in ingresso.

In condizioni ottimali, cioè in presenza di inversione totale ( $P = 1$ ), elevati guadagni ( $G \gg 1$ ) e segnali in entrata intensi ( $n_i \gg 1$ ), si ottiene la figura di rumore

$$R \simeq 1 + \frac{1}{F_i}. \quad (2.63)$$

Le espressioni (2.60), (2.61) e (2.63) sono qualitativamente analoghe a quelle corrispondenti del caso dell'amplificatore parametrico phase insensitive: in questo caso l'amplificazione spontanea gioca il ruolo dell'emissione spontanea parametrica, e la condizione di inversione di popolazione totale corrisponde al modo idler vuoto [19]. Valgono quindi le stesse considerazioni per quanto riguarda la figura di rumore e si ritrova anche in questo caso il "limite quantico" di 3dB.

Gli stessi risultati si ottengono anche nel caso di un amplificatore lineare basato sullo scattering Raman [79]. In tal caso il ruolo dell'emissione spontanea è giocato dalle fluttuazioni di punto zero del modo fononico coinvolto nell'interazione con la radiazione incidente. È utile notare nuovamente come il limite quantistico alla figura di rumore in rivelazione diretta non dipenda dai fenomeni fisici che caratterizzano il particolare tipo di amplificatore phase insensitive considerato, ma soltanto dalle condizioni di linearità del regime di funzionamento in esame. Tale limite è spesso erroneamente considerato invalicabile, ma in realtà può essere ampiamente superato utilizzando amplificatori phase insensitive funzionanti in regime altamente non lineare, come verrà dimostrato nel capitolo 4.

## 2.6 Amplificatore phase sensitive

Un amplificatore phase sensitive (PSA) è per definizione un dispositivo caratterizzato da un guadagno che dipende dalla fase del campo da amplificare. Assumendo come ipotesi la linearità e l'unitarietà dell'evoluzione dei campi, l'amplificatore phase sensitive dà luogo alla seguente trasformazione tra il campo in ingresso  $a$  e quello in uscita  $A$

$$A = \mu a + \nu a^\dagger, \quad (2.64)$$

dove

$$\mu = \frac{1}{2} (G^{1/2} + G^{-1/2}), \quad (2.65)$$

$$\nu = \frac{e^{2i\phi}}{2} (G^{1/2} - G^{-1/2}). \quad (2.66)$$

Diversamente da quanto visto per l'amplificatore phase insensitive, in questo caso non è richiesta l'introduzione di un modo idler: le condizioni di linearità e unitarietà sono soddisfatte scegliendo opportunamente i coefficienti della combinazione lineare tra i campi  $a$  e  $a^\dagger$ . Tale combinazione è analoga alla trasformazione di "squeezing" (descritta nel paragrafo A.1).

Dalla (2.64) si ottengono le seguenti relazioni per le quadrature coniugate a fasi  $\phi$  e  $\phi + \frac{\pi}{2}$

$$A_\phi = G^{1/2} a_\phi, \quad (2.67)$$

$$A_{\phi+\pi/2} = G^{-1/2} a_{\phi+\pi/2}, \quad (2.68)$$

dove il guadagno è appunto sensibile alla fase della quadratura considerata. In particolare, mentre una quadratura viene amplificata, quella coniugata viene deamplificata secondo il fattore inverso  $G^{-1/2}$ .

La trasformazione unitaria  $A = U^\dagger a U$  è realizzata dal seguente operatore

$$\hat{U} = \exp \left\{ -\frac{1}{4} \ln G \left[ (a^\dagger)^2 e^{-i\phi} - a^2 e^{i\phi} \right] \right\}, \quad (2.69)$$

che coincide appunto con l'operatore di "squeezing". Se lo stato di ingresso è costituito dal vuoto, questo tipo di amplificatore può infatti essere usato anche come sorgente di stati di vuoto "squeezed".

Come si vede dalle (2.67)-(2.68), gli operatori di quadratura in uscita (e tutte le loro potenze) vengono scalati esattamente a partire da quelli in ingresso senza termini additivi. Anche le fluttuazioni risulteranno allora scalate esattamente da quelle in ingresso e la figura di rumore in rivelazione omodina è unitaria. L'amplificatore phase sensitive è dunque ideale per rivelazione omodina, in quanto moltiplica esattamente l'operatore di quadratura per un fattore  $G^{1/2}$  e in particolare non degrada il rapporto segnale-disturbo:

$$SNR_{A_\phi} = SNR_{a_\phi} . \quad (2.70)$$

Tale amplificatore riduce le fluttuazioni, e quindi opera uno "squeezing", nella quadratura deamplificata, mentre aumenta quelle nella quadratura amplificata, distruggendo così un eventuale grado di "squeezing" iniziale in tale quadratura per  $G > 1/(4\langle\Delta a_\phi^2\rangle)$ . Le fluttuazioni nelle due quadrature coniugate vengono comunque amplificate o deamplificate mantenendo il prodotto costante. Se lo stato in ingresso è di minima indeterminazione, lo sarà anche quello in uscita. Per quanto riguarda il caso di rivelazione diretta, il numero medio di fotoni in uscita è dato da

$$\langle n_A \rangle = (\mu^2 + |\nu|^2)\langle n_a \rangle + |\nu|^2 + \mu\nu\langle a^{\dagger 2} \rangle + \mu\nu^*\langle a^2 \rangle . \quad (2.71)$$

Diversamente dai casi fin qui trattati, il numero medio in uscita è somma di quattro termini: oltre al primo termine di riscaldamento diretto del numero medio in ingresso e al secondo termine di emissione parametrica spontanea, compaiono ulteriori termini che dipendono da osservabili non riconducibili al numero di fotoni. Il guadagno dipende allora dal tipo di stato in ingresso. Questo è un esempio di amplificatore che è lineare per certe osservabili, come ad esempio la quadratura, ma non per altre, come il numero di fotoni. Vediamo ora come cambia il guadagno nel numero medio di fotoni al variare dello stato in ingresso.

Consideriamo per primo il caso degli stati coerenti. È noto che per tali stati  $\langle a^\dagger a \rangle = |\alpha|^2$ ,  $\langle a^{\dagger 2} \rangle = (\alpha^*)^2$  e  $\langle a^2 \rangle = \alpha^2$ . Sfruttando le equazioni (2.65) e (2.66), il guadagno nel numero medio  $G_n$  in funzione di  $G$  in questo caso assume la forma

$$G_n = \frac{1}{2}(G + G^{-1}) + \frac{1}{2}(G - G^{-1}) \cos[2(\phi - \psi)] , \quad (2.72)$$

dove  $\psi$  rappresenta la fase dello stato coerente considerato. Il guadagno dipende dunque dallo sfasamento tra lo stato in ingresso e la fase caratteristica dell'amplificatore  $\phi$ . Esso assume il valore massimo  $G$  per  $\phi - \psi = 0$ , mentre per  $\phi - \psi = \pi/2$  il segnale viene attenuato di un fattore  $G^{-1}$ .

Nel caso degli stati squeezed  $|\alpha, \zeta\rangle$  (con  $\zeta = \rho e^{2i\psi_s}$ ), utilizzando le equazioni (A.13), (A.14) e (A.15), il guadagno assume la forma

$$G_n = \frac{1}{2}(G + G^{-1}) + \frac{1}{2}(G - G^{-1}) \left\{ \cos[2(\phi - \psi_s)]\theta|\gamma| + \cos[2(\phi - \psi)]|\alpha|^2 \right\}, \quad (2.73)$$

dove  $\theta = \cosh \rho$  e  $\gamma = e^{2i\psi_s} \sinh \rho$ . In tal caso il guadagno dipende anche dalla direzione di squeezing. La (2.73) assume valore massimo quando la direzione di squeezing dello stato considerato coincide con la fase dello stato coerente  $\alpha$  da cui è ottenuto ( $\psi = \psi_s$ ) e nello stesso tempo lo sfasamento rispetto alla fase dell'amplificatore è nullo. In tal caso il guadagno assume la forma

$$G_n = \frac{1}{2}(G + G^{-1}) + \frac{1}{2}(G - G^{-1}) \left\{ 1 + \frac{\bar{m}}{n_t} \left( \sqrt{1 + \bar{m}^{-1}} - 1 \right) \right\}, \quad (2.74)$$

dove  $\bar{m} = \sinh^2 \rho$  e  $n_t = |\alpha|^2 + \sinh^2 \rho$  rappresentano rispettivamente il numero di fotoni di squeezing e il numero di fotoni totali dello stato iniziale. Come si può osservare, in questo caso il guadagno risultante dipende anche dal numero di fotoni dello stato in ingresso e risulta in particolare più elevato, a parità di intensità del segnale incidente, rispetto al caso degli stati coerenti.

Nel caso degli stati numero  $\langle a^{\dagger 2} \rangle = \langle a^2 \rangle = 0$  nella (2.71) e il guadagno assume la forma

$$G_n = \frac{1}{2}(G + G^{-1}). \quad (2.75)$$

Come nel caso degli stati coerenti il guadagno non dipende dall'intensità dello stato in ingresso. Il valore del guadagno è inferiore al caso di massima amplificazione per stati coerenti e squeezed e in particolare è la metà rispetto al caso degli stati coerenti per  $G \gg 1$ , con  $\phi - \psi = 0$ .

Ritorniamo ora al caso coerente e vediamo che forma assume la figura di rumore. Dopo aver calcolato le fluttuazioni relative alla (2.71), date da

$$\langle \Delta n_A^2 \rangle = 2|\mu\nu|^2 + |(\mu^2 + \nu^2)\alpha + 2\mu\nu\alpha^*|^2, \quad (2.76)$$

nel caso di massima amplificazione ( $\phi = \psi$ ) si ricava facilmente

$$R = 1 + \frac{(1 - G^{-2})^2}{4\langle n_a \rangle}. \quad (2.77)$$

Per guadagni elevati e per stati molto intensi in ingresso la figura di rumore si avvicina al valore ideale.

Nel caso degli stati numero invece la figura di rumore è priva di senso, perchè le fluttuazioni del segnale in ingresso sono nulle. Si può invece calcolare facilmente il fattore di Fano in uscita

$$F_{out} = \frac{1}{4} \frac{(G^2 + G^{-2} - 2)(n_a^2 + n_a + 1)}{(G + G^{-1})(n_a + 2) - 1}. \quad (2.78)$$

Come si può osservare, il fattore di Fano in uscita aumenta all'aumentare del numero di fotoni in ingresso e diventa asintoticamente lineare per segnali intensi. L'insorgere di fluttuazioni così elevate è dovuto al fatto che l'amplificatore è sensibile alla fase del segnale incidente e perciò non funziona in modo efficiente con stati a fase non definita come gli stati numero. Al contrario, come abbiamo visto, risulta adatto per stati coerenti in ingresso. Tale amplificatore però funziona in modo efficiente soltanto quando lo sfasamento tra lo stato coerente in ingresso e la fase  $\phi$  dell'amplificatore è nullo. Per realizzare le condizioni di massima amplificazione occorre quindi una previa conoscenza del valore della fase della radiazione incidente e questo comporta misure demolitive sul segnale. L'amplificatore phase sensitive non rappresenta quindi in questo caso un dispositivo di facile impiego nelle applicazioni pratiche.

Vediamo ora come si può realizzare praticamente un amplificatore di questo tipo. Con considerazioni analoghe al caso dell'amplificatore phase insensitive, si giunge alla seguente espressione per l'Hamiltoniana nello schema di Schrödinger

$$\hat{H}_I = \chi^{(2)} \left( (a^\dagger)^2 e^{-i(\omega t + \phi)} + a^2 e^{i(\omega t + \phi)} \right), \quad (2.79)$$

dove  $\omega = 2\omega_a$  rappresenta la frequenza del modo di pompa classico. Tale Hamiltoniana corrisponde a quella di un miscelatore a tre onde (2.52) in cui i modi  $a$  e  $b$  sono degeneri e il modo  $c$  è classico. La relazione tra il tempo di interazione  $\tau$ , la costante di accoppiamento  $\kappa$  ed il guadagno  $G$  è data da [82]

$$\kappa\tau = \frac{1}{4} \ln G. \quad (2.80)$$

Pertanto per realizzare un buon amplificatore phase sensitive occorre semplicemente disporre di un materiale ad alta suscettività  $\chi^{(2)}$  operando ad una frequenza di pompa doppia di quella del segnale. Se il modo di pompa classico è anch'esso degenero, è possibile usare anche materiali con con suscettività  $\chi^{(3)}$ .

## 2.7 Preamplificatori

Nelle reti di comunicazione ottiche gli amplificatori tipicamente trovano due forme di utilizzo:

- i)* come “ripetitori”, inseriti a intervalli regolari in una linea di trasmissione in modo da compensare le perdite del segnale durante la propagazione dal trasmettitore all’utente (questo tipo di impiego è dominante nelle comunicazioni ottiche su grandi distanze),
- ii)* come preamplificatori, anteposti a una derivazione della linea (rubinetto ottico) per portare il segnale a più utenti, oppure all’apparato di rivelazione.

In questo paragrafo vengono analizzate le prestazioni degli amplificatori lineari descritti in precedenza quando sono usati come preamplificatori. Ci limitiamo quindi a considerare soltanto reti di comunicazione ottiche su brevi distanze (LAN), in cui le perdite maggiori sono localizzate alle derivazioni e allo stadio di rivelazione.

Come già accennato nel paragrafo 2.3, lo scopo dell’impiego di un amplificatore è quello di aumentare l’intensità del segnale per compensare la perdita successiva (modellizzata da un beam splitter) e allo stesso tempo migliorare la figura di rumore del processo di attenuazione. È dunque inutile operare una post-amplificazione, ponendo l’amplificatore dopo il beam splitter, perchè in tal caso si può solo aumentare l’intensità del segnale, ma non si riesce a recuperare il valore originale del rapporto segnale-disturbo, che è già stato degradato dal beam splitter stesso.

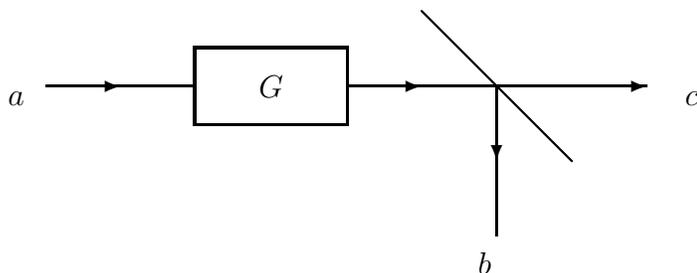


Figura 2.5: Configurazione di un preamplificatore.

In questo paragrafo consideriamo dunque uno schema di “amplificatore+beam splitter”, come mostrato in Fig. 2.5. Come vedremo, la scelta del tipo di amplificatore dipende strettamente dal tipo di rivelazione effettuata.

Consideriamo innanzi tutto il caso di rivelazione omodina, particolarmente interessante per l’impiego che trova in diverse applicazioni sperimentali, quali ad esempio la tomografia quantistica del campo elettromagnetico recentemente proposta in letteratura [71, 22, 23, 27]. Essendo il PSA un amplificatore ideale per rivelazione omodina, in quanto non degrada il rapporto segnale-disturbo iniziale nella quadratura del campo rivelata, esso rappresenta il tipo di preamplificatore più adatto. La figura di rumore in tal caso assume la forma (utilizzando nell’ordine le relazioni (2.34), (2.35) e (2.67))

$$\frac{SNR_{a_\phi}}{SNR_{A_\phi}} = 1 + 2 \frac{1 - \eta}{G\eta} \frac{\langle \Delta b_\phi^2 \rangle}{\langle \Delta a_\phi^2 \rangle + 1/4} \quad (2.81)$$

e può quindi raggiungere il valore ideale per guadagni sufficientemente elevati e per qualsiasi stato in ingresso.

Il PIA invece non è un buon preamplificatore per rivelazione omodina. Sfruttando infatti le relazioni (2.34), (2.35), (2.38) e (2.39), la figura di rumore assume la forma

$$\frac{SNR_{a_\phi}}{SNR_{A_\phi}} = 1 + 2 \frac{1 - \eta}{G\eta} \frac{\langle \Delta b_\phi^2 \rangle}{\langle \Delta a_\phi^2 \rangle + 1/4} + \frac{G - 1}{2G} \frac{1}{\langle \Delta a_\phi^2 \rangle + 1/4}, \quad (2.82)$$

compare cioè un terzo termine a secondo membro della (2.82) che non è trascurabile nel limite di guadagni elevati.

Consideriamo ora il caso di rivelazione diretta, che rappresenta il caso più interessante per le applicazioni alle reti di comunicazione ottiche, in quanto corrisponde al tipo di rivelazione più facilmente realizzabile nella pratica e inoltre, unitamente alla codifica su stati numero della radiazione, permette di raggiungere la massima quantità di informazione trasmissibile in un canale quantistico (vedi cap. 5). Nel caso di rivelazione diretta la configurazione amplificatore+beam splitter considerata in questo paragrafo descrive sia uno schema di preamplificazione per sostenere una perdita di linea successiva in una rete di comunicazione ottica, sia una preamplificazione allo stadio di rivelazione, per compensare gli effetti di un fotocontatore non ideale, che come abbiamo accennato nel paragrafo 2.3 può essere schematizzato con un beam splitter in serie a un rivelatore ideale. Nel caso di rivelazione omodina invece la descrizione di inefficienze all’apparato di rivelazione non è così semplice e verrà analizzata nel capitolo 5.

Come abbiamo visto nel paragrafo 2.6, il PSA in rivelazione diretta è un buon amplificatore soltanto per stati in ingresso a fase definita. Nel caso degli stati coerenti, dalle relazioni (2.30), (2.31), (2.71) e (2.76) corrispondenti al caso di massima amplificazione, si ottiene la figura di rumore

$$R = 1 + \frac{(1 - G^{-2})^2}{4\langle n_a \rangle} + \frac{(1 - \eta)}{\eta G} + \frac{1}{4} \frac{(1 - \eta) G + G^{-1} - 2}{\eta G^2 \langle \Delta n_a^2 \rangle}. \quad (2.83)$$

Per segnali coerenti intensi e guadagni elevati il PSA funziona bene anche come preamplificatore. Esso però risulta estremamente “rumoroso” per stati a fase non definita in ingresso e non costituisce quindi un preamplificatore ideale in rivelazione diretta.

Con un procedimento di calcolo analogo al caso del PSA, nel caso del PIA con il modo idler vuoto la figura di rumore assume la forma

$$R = 1 + \frac{1 - \eta}{G\eta F_a} + \frac{G - 1}{G\langle \Delta n_a^2 \rangle} (\langle n_a \rangle + 2) + 2 \frac{1 - \eta}{\eta} \frac{G - 1}{G^2 \langle \Delta n^2 \rangle}, \quad (2.84)$$

e nel limite ottimale di segnali molto intensi in ingresso e guadagni elevati si riduce al “limite quantico” di 3dB discusso nel paragrafo 2.4, ma non raggiunge mai il valore ideale.

Un amplificatore numero ideale in rivelazione diretta (PNA) è un dispositivo che per definizione opera le seguenti trasformazioni per il numero medio di fotoni e le corrispondenti fluttuazioni [84]

$$\langle \hat{n}_A \rangle = G \langle \hat{n}_a \rangle, \quad (2.85)$$

$$\langle \Delta \hat{n}_A^2 \rangle = G^2 \langle \Delta \hat{n}_a^2 \rangle. \quad (2.86)$$

La figura di rumore infatti risulta unitaria. Nel caso in cui tale dispositivo venisse impiegato come preamplificatore in rivelazione diretta la figura di rumore assumerebbe la forma

$$R = 1 + \frac{1 - \eta}{G\eta F_a}, \quad (2.87)$$

e raggiungerebbe dunque il valore unitario per  $G \gg 1$  e per qualsiasi segnale in ingresso.

Nel caso di rivelazione eterodina infine il preamplificatore ideale è rappresentato dall’amplificatore lineare phase insensitive, come è già stato accennato nel paragrafo 2.4. Questo caso verrà comunque trattato in modo adeguato nel capitolo 5.

Rivelazione	Amplificazione
Diretta	PNA
Omodina	PSA
Eterodina	PIA

Tabella 2.1: Corrispondenza ideale tra apparato di rivelazione e tipo di amplificatore.

Abbiamo visto dunque come la scelta di un preamplificatore dipenda in modo cruciale dallo schema di rivelazione adottato: il dispositivo più adatto corrisponde in generale all'amplificatore ideale per l'osservabile che viene rivelata. Le corrispondenze ottimali tra il tipo di amplificazione e l'apparato di rivelazione sono riassunte schematicamente nella tabella 2.1.

Uno dei problemi ancora aperti è quello di realizzare un amplificatore ideale in rivelazione diretta (PNA). Come vedremo nel prossimo capitolo, l'amplificatore numero ideale è descritto da un'Hamiltoniana che non corrisponde a un dispositivo facilmente realizzabile nella pratica. Per questo motivo i capitoli 3 e 4 vengono dedicati allo studio di dispositivi fisicamente realizzabili, che si avvicinino il più possibile alle prestazioni dell'amplificatore numero ideale in rivelazione diretta e consentano in particolare di superare il "limite quantico" degli amplificatori lineari.

# Capitolo 3

## Amplificazione e duplicazione in processi parametrici trilineari

Questo capitolo è dedicato all'analisi dei processi di amplificazione e duplicazione del numero di fotoni in processi parametrici trilineari. Vengono innanzitutto descritti l'amplificatore numero e il duplicatore numero ideali e le corrispondenti Hamiltoniane. Data la difficoltà di ricondurre le Hamiltoniane ideali a dispositivi realizzabili praticamente, vengono successivamente analizzati i processi parametrici trilineari totalmente quantistici in rivelazione diretta, che corrispondono alla più immediata approssimazione delle Hamiltoniane ideali e sono facilmente realizzabili nella pratica.

Questa analisi è condotta prevalentemente con metodi numerici, dal momento che su base analitica è possibile valutare soltanto il tempo di conversione in un'approssimazione “di campo medio” [21]. Si mostra in particolare l'efficacia dei processi inversi di attenuazione e “ricombinazione”, mentre i processi diretti di amplificazione e duplicazione risultano meno convenienti rispetto all'uso dei dispositivi lineari descritti nel capitolo 2 [17].

### 3.1 Amplificatore numero ideale

L'amplificatore ideale del numero di fotoni (PNA), come è stato accennato nel capitolo precedente, risulta particolarmente interessante per le applicazioni alle reti di comunicazione ottiche, in quanto gli stati numero rappresentano il tipo di codifica che, unitamente alla rivelazione diretta, porta alla maggior quantità di

informazione trasmissibile in un canale di comunicazione quantistico. In descrizione di Heisenberg l'amplificazione ideale di numero di fotoni corrisponde alla moltiplicazione dell'operatore numero per il guadagno intero  $G$

$$a^\dagger a \rightarrow G a^\dagger a . \quad (3.1)$$

A causa della natura intera degli autovalori dell'operatore numero  $a^\dagger a$ , il processo inverso di attenuazione non corrisponde in modo banale alla sostituzione di  $G$  con  $G^{-1}$ . La attenuazione numero ideale è descritta dalla relazione

$$a^\dagger a \rightarrow [G^{-1} a^\dagger a] , \quad (3.2)$$

dove con il simbolo  $[x]$  è indicata la parte intera di  $x$ . Di conseguenza, anche nel caso ideale, la deamplificazione numero non è lineare ma il guadagno effettivo  $G_*$ , che in questo caso rappresenta un fattore di deamplificazione, dipende dal segnale di ingresso secondo la relazione

$$G_* = \frac{[G^{-1}n]}{n} \leq G^{-1} , \quad (3.3)$$

dove  $n$  indica appunto il numero di fotoni in ingresso. La trasformazione (3.2) si ottiene operando la seguente trasformazione sui campi [14, 15]

$$a^\dagger \rightarrow a_{(G)}^\dagger , \quad (3.4)$$

dove  $a_{(G)}^\dagger$  è un operatore bosonico che crea  $G$  fotoni alla volta, ovvero

$$a_{(G)}^\dagger |n\rangle = \sqrt{[G^{-1}n] + 1} |n + G\rangle , \quad (3.5)$$

$$[a_{(G)}, a_{(G)}^\dagger] = 1 , \quad (3.6)$$

$$[a_{(G)}, a^\dagger a] = G a_{(G)} . \quad (3.7)$$

La forma esplicita di  $a_{(G)}^\dagger$  è

$$a_{(G)}^\dagger = \left\{ \frac{[G^{-1}\hat{n}](\hat{n} - G)!}{\hat{n}!} \right\}^{1/2} (a^\dagger)^G \quad (3.8)$$

e da questa segue che

$$a_{(G)}^\dagger a_{(G)} = [G^{-1} a^\dagger a] , \quad (3.9)$$

che corrisponde al caso di attenuazione (3.2). L'amplificazione (3.1) corrisponde invece alla trasformazione inversa

$$a_{(G)}^\dagger \rightarrow a^\dagger . \quad (3.10)$$

Le trasformazioni (3.4) e (3.10) sono essenzialmente permutazioni di due diversi tipi di bosoni. Per modi commutanti  $[a, c] = [a, c^\dagger] = 0$  la trasformazione di permutazione  $a \leftrightarrow c$  è realizzata dall'evoluzione di Heisenberg

$$PaP = c, \quad PcP = a , \quad (3.11)$$

dove

$$P = P^\dagger = \exp\left(i\frac{\pi}{2}c^\dagger c\right) \exp\left[-i\frac{\pi}{2}(a^\dagger c + c^\dagger a)\right] \exp\left(i\frac{\pi}{2}c^\dagger c\right) . \quad (3.12)$$

Se i due modi  $a$  e  $c$  hanno frequenza diversa, l'Hamiltoniana di interazione

$$H_I = a^\dagger c + c^\dagger a \quad (3.13)$$

in presenza di un modo di pompa classico  $d$  a frequenza  $\omega_d = \omega_a - \omega_c$  realizza quindi una conversione di frequenza tra i due modi  $a$  e  $c$ .

Nel caso in esame, dato che  $a$  and  $a_{(G)}$  non commutano, conviene introdurre un modo  $c$  a frequenza diversa da quella di  $a$  e operare quindi anche un cambio di frequenza. In questo caso l'operatore di amplificazione, che agisce anche da convertitore di frequenza, diventa

$$P_{(G)} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}c^\dagger c\right) \exp\left[-i\frac{\pi}{2}(a_{(G)}^\dagger c + c^\dagger a_{(G)})\right] \exp\left(i\frac{\pi}{2}c^\dagger c\right) . \quad (3.14)$$

L'evoluzione alla Schrödinger degli stati numero nel caso di amplificazione e attenuazione è data da

$$P_{(G)}|0, n\rangle = |Gn, 0\rangle , \quad (3.15)$$

$$P_{(G)}|n, 0\rangle = |G \langle G^{-1}n \rangle , [G^{-1}n] \rangle , \quad (3.16)$$

dove  $\langle x \rangle = x - [x]$  indica la parte frazionaria di  $x$  e  $|n, m\rangle = |n\rangle_a \otimes |m\rangle_c$ .

Se si vuole considerare soltanto il modo  $a$  nelle trasformazioni precedenti, occorre operare un'ulteriore conversione di frequenza  $P$ . In tal caso le equazioni (3.15-3.16) diventano

$$P_{(G)}P_{(1)}|n, 0\rangle = |Gn, 0\rangle \quad (3.17)$$

$$P_{(1)}P_{(G)}|0, n\rangle = |G \langle G^{-1}n \rangle , [G^{-1}n] \rangle . \quad (3.18)$$

Da tali relazioni è dunque possibile ignorare totalmente la dinamica del modo  $c$  adottando la rappresentazione della matrice densità degli stati ed eseguendo la traccia parziale sul modo  $c$ . In tal caso il modo  $c$  diventa responsabile di rumore aggiunto anche nel caso ideale, come si può vedere dalla (3.3), e corrisponde al modo idler dell'amplificatore lineare di campo.

A meno di uno sfasamento di  $\pi/2$  (che si può ottenere ad esempio con un cambiamento di cammino ottico), l'operatore di evoluzione (3.14) corrisponde alla seguente Hamiltoniana di interazione nello schema di Dirac

$$\hat{H}_I = a_{(G)}^\dagger c + a_{(G)} c^\dagger, \quad (3.19)$$

al tempo adimensionale di conversione

$$\tau_* = \frac{\pi}{2}. \quad (3.20)$$

Per il principio di conservazione dell'energia occorre che sia soddisfatta la condizione di risonanza  $G\omega_a = \omega_c$ . Nel caso non risonante è necessario introdurre un terzo modo di pompa  $c$  a frequenza  $\omega_d = G\omega_a - \omega_c$ . In tal caso l'Hamiltoniana (3.19) viene ottenuta dalla

$$\hat{H}' = a_{(G)}^\dagger c d + a_{(G)} c^\dagger d^\dagger \quad (3.21)$$

nell'approssimazione di pompa classica già discussa in precedenza. L'amplificatore numero descritto da questa Hamiltoniana è dunque anche un convertitore di frequenza (PNAFC) ed è schematizzato in Fig. 3.1.

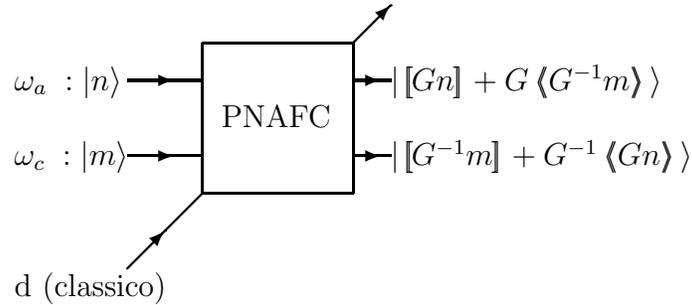


Figura 3.1: Schema di un PNA ideale.

L'Hamiltoniana (3.21) descrive un processo non lineare di ordine  $G+1$  con suscettività dipendente in modo complicato dall'intensità del campo incidente e quindi

di difficile realizzazione pratica. Ad esempio, nel caso di guadagno  $G = 2$  e per segnali in ingresso intensi ( $\langle a^\dagger a \rangle \gg 2$ ) l'operatore di creazione di due fotoni può essere approssimato nel modo seguente

$$a_{(2)}^\dagger \simeq a^{\dagger 2} [2(a^\dagger a + 1)]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

e l'Hamiltoniana di interazione (3.19) diventa

$$\hat{H}_2 \simeq a^{\dagger 2} c [2(a^\dagger a + 1)]^{-\frac{1}{2}} + \text{h.c.} , \quad (3.23)$$

ovvero un processo parametrico trilineare (si veda il paragrafo 3.3) con accoppiamento dipendente in modo non banale dall'intensità del campo e quindi non riconducibile a un dispositivo ottico elementare. Nel corso di questo capitolo verranno analizzate le prestazioni di dispositivi parametrici trilineari semplici, la cui Hamiltoniana costituisce una prima approssimazione della (3.21) nel limite di costante di accoppiamento indipendente dall'intensità del campo.

## 3.2 Duplicatore numero ideale

La duplicazione è una trasformazione che produce due copie identiche di uno stesso stato di ingresso. In base ai requisiti di unitarietà dell'operatore di evoluzione temporale quantistico, è semplice dimostrare che si possono duplicare esattamente soltanto stati che appartengono ad un set ortogonale [77]. È dunque possibile duplicare stati numero, mentre duplicatori di stati coerenti o di stati "squeezed" non sono realizzabili nemmeno idealmente. Dal punto di vista applicativo l'utilità di un duplicatore numero è notevole in una rete di comunicazione ottica con codifica su stati numero e rivelazione diretta, in quanto rappresenta un rubinetto ottico senza perdite.

In descrizione di Schrödinger il duplicatore numero ideale (PND) realizza la seguente trasformazione sugli stati numero

$$|0, 0, n\rangle \rightarrow |n, n, 0\rangle , \quad (3.24)$$

dove  $|n, m, p\rangle = |n\rangle_a \otimes |m\rangle_b \otimes |p\rangle_c$ ,  $a$  e  $b$  sono i modi duplicati e  $c$  il modo di ingresso. La (3.24) può essere invertita banalmente dando luogo a un processo di "ricombinazione".

Con considerazioni analoghe al caso del PNA, l'evoluzione (3.24), con conversione di frequenza, si ottiene permutando gli operatori  $a_{(1,1)}$  e  $c$ , dove  $a_{(1,1)}^\dagger$  rappresenta un operatore bosonico di creazione di due modi [15]

$$a_{(1,1)}^\dagger |n_a, n_b\rangle = \sqrt{(\min\{n_a, n_b\} + 1)} |n_a + 1, n_b + 1\rangle, \quad (3.25)$$

$$[a_{(1,1)}, a_{(1,1)}^\dagger] = 1, \quad (3.26)$$

$$[a_{(1,1)}, a^\dagger a + b^\dagger b] = 2a_{(1,1)}. \quad (3.27)$$

L'espressione esplicita di  $a_{(1,1)}$  è data da

$$a_{(1,1)}^\dagger = a^\dagger b^\dagger \frac{1}{\sqrt{\max\{a^\dagger a, b^\dagger b\} + 1}}. \quad (3.28)$$

Nel caso di duplicazione vera e propria  $\langle a^\dagger a \rangle = \langle b^\dagger b \rangle$  e  $a_{(1,1)}$  diventa

$$a_{(1,1)}^\dagger = a^\dagger b^\dagger (b^\dagger b + 1)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.29)$$

Con considerazioni analoghe al caso del PNA, l'Hamiltoniana di interazione nello schema di Dirac assume la forma

$$\hat{H}_I = a_{(1,1)}^\dagger c + a_{(1,1)} c^\dagger. \quad (3.30)$$

Per il principio di conservazione dell'energia, la duplicazione numero con conversione di frequenza richiede l'introduzione di un modo di pompa classico  $d$  a frequenza  $\omega_d = \omega_a + \omega_b - \omega_c$  ed è descritta dall'Hamiltoniana di interazione

$$\hat{H}' = a_{(1,1)}^\dagger c d + a_{(1,1)} c^\dagger d^\dagger. \quad (3.31)$$

Come mostrato in Fig. 3.2, il duplicatore numero ideale è dunque un dispositivo a otto porte: tre modi quantistici in ingresso e in uscita e un modo di pompa classico. Data la forma dell'Hamiltoniana ideale (3.30), tale dispositivo non è facilmente realizzabile in pratica.

Nel paragrafo 3.5 verranno analizzati i processi di duplicazione e ricombinazione realizzabili con dispositivi parametrici di generazione di frequenze somma e differenza, descritti da un'Hamiltoniana trilineare nei campi che approssima la (3.31) nel limite di suscettività  $\chi^{(2)}$  indipendente dall'intensità del campo incidente.

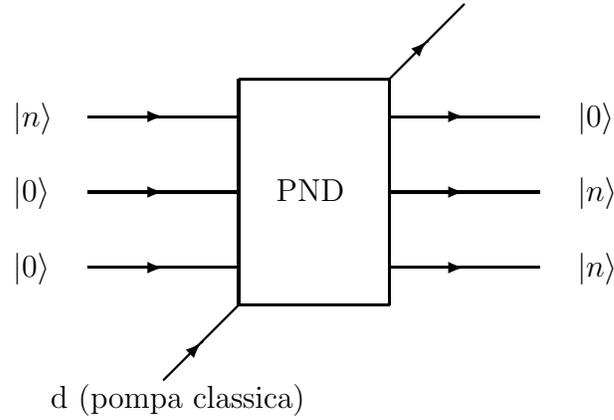


Figura 3.2: Schema di un PND ideale.

### 3.3 Processi parametrici trilineari: caratteristiche generali

Come è già stato accennato nel capitolo precedente, i processi parametrici descrivono interazioni nonrisonanti tra radiazione e materia. Tali processi soddisfano le relazioni di Manley-Rowe [7], che regolano lo scambio di potenza tra modi del campo elettromagnetico accoppiati secondo un dato ordine di nonlinearietà. Per introdurre queste relazioni supponiamo per semplicità che le frequenze dei modi che sono generati in un processo parametrico nonlineare siano esprimibili come somme di due frequenze fondamentali  $\omega'$  e  $\omega''$

$$\omega_{jk} = j\omega' + k\omega'' , \quad (3.32)$$

dove  $j$  e  $k$  rappresentano numeri interi arbitrari (positivi, negativi o nulli) e  $\omega_{jk} \geq 0$ . Le relazioni di Manley-Rowe in un processo quantistico sono espresse in termini di operatori numero di fotoni nel modo seguente

$$\sum_{jk} j \frac{d\hat{n}(\omega_{jk})}{dt} = \sum_{jk} k \frac{d\hat{n}(\omega_{jk})}{dt} = 0 , \quad (3.33)$$

e corrispondono alle costanti del moto

$$\sum_{jk} j \hat{n}(\omega_{jk}) = \hat{C}_1 , \quad (3.34)$$

$$\sum_{jk} k \hat{n}(\omega_{jk}) = \hat{C}_2 . \quad (3.35)$$

Si noti che in generale il numero totale di fotoni non si conserva e questo, come si vedrà nel seguito, porta a processi di amplificazione e attenuazione del numero di fotoni.

In questo capitolo prendiamo in considerazione processi nonlineari al terz'ordine, descritti in approssimazione d'onda rotante dall'Hamiltoniana di interazione

$$\hat{H}_I = \kappa (a^\dagger b^\dagger c + abc^\dagger), \quad (3.36)$$

dove  $\kappa = \chi^{(2)}$  e  $\omega_c = \omega_a + \omega_b$ . L'interesse di tali processi, come è già stato accennato, risiede nel fatto che corrispondono a dispositivi ottici facilmente realizzabili nella pratica (materiali con suscettività non lineare  $\chi^{(2)}$ , oppure  $\chi^{(3)}$  ed un modo di pompa classico). In questo caso possiamo considerare le frequenze  $\omega_a$  e  $\omega_b$  come frequenze fondamentali e dunque possiamo scrivere nella notazione appena introdotta  $\omega_a = \omega_{10}$ ,  $\omega_b = \omega_{01}$  e  $\omega_c = \omega_{11}$ . Le costanti del moto assumono la forma

$$\hat{n}_a + \hat{n}_c = \hat{C}_1, \quad (3.37)$$

$$\hat{n}_b + \hat{n}_c = \hat{C}_2. \quad (3.38)$$

Integrando le equazioni di Heisenberg e calcolando i valori di aspettazione sullo stato di ingresso si ottiene

$$\langle \delta \hat{n}_c \rangle = -\langle \delta \hat{n}_a \rangle = -\langle \delta \hat{n}_b \rangle, \quad (3.39)$$

dove  $\delta \hat{O} \equiv \hat{O}(t) - \hat{O}(0) \equiv \hat{O}_{out} - \hat{O}_{in}$ . La (3.39) quantifica lo scambio di fotoni per ciascun modo durante l'interazione. In particolare, il numero di fotoni creati (annichiliti) nel modo  $c$  è uguale al numero di fotoni annichiliti (creati) nel modo  $a$  e nel modo  $b$ . Nel caso particolare in cui il modo  $c$  sia inizialmente vuoto il processo è detto “generazione di frequenza somma” in quanto vengono creati fotoni a frequenza somma delle frequenze incidenti. Il processo inverso, con i modi  $a$  e  $b$  inizialmente vuoti, è invece detto “generazione di frequenze differenza”. La generazione di frequenze differenza può anche essere interpretata come processo di duplicazione di fotoni, in quanto vengono creati due stati con ugual numero medio di fotoni. La generazione di frequenza somma può essere invece interpretata come processo di ricombinazione. La (3.36) rappresenta una drastica approssimazione dell'Hamiltoniana (3.30) che descrive appunto il duplicatore ideale. Nel caso

in cui il modo  $c$  è classico la (3.36) descrive l'amplificatore parametrico phase insensitive analizzato nel capitolo precedente.

Nel caso in cui il modo  $a$  e il modo  $b$  sono degeneri l'Hamiltoniana di interazione diventa

$$H = \kappa (a^2 c^\dagger + a^{\dagger 2} c) , \quad (3.40)$$

con  $\omega_c = 2\omega_a$ . Il sistema è caratterizzato da un'unica relazione di Manley-Rowe

$$\hat{n}_a + 2\hat{n}_c = \hat{C} . \quad (3.41)$$

Esiste comunque una nuova costante del moto rispetto al caso precedente, cioè la parità del numero di fotoni del modo  $a$

$$\langle \hat{n}_a/2 \rangle = \hat{C}' , \quad (3.42)$$

dove  $x = [x] + \langle x \rangle$  indica la scomposizione di  $x$  in parte intera  $[x]$  e parte frazionaria  $\langle x \rangle$ . Lo scambio di fotoni tra i due modi durante l'interazione è dato da

$$2\langle \delta n_c \rangle = -\langle \delta n_a \rangle . \quad (3.43)$$

Il caso in cui il modo  $a$  è inizialmente vuoto è detto “generazione di sub-armonica”, in quanto vengono generati fotoni a frequenza dimezzata rispetto a quella iniziale. I fotoni creati nel modo  $a$  sono in numero doppio rispetto a quelli annichiliti nel modo  $c$ . Ciò suggerisce di utilizzare tale processo per progettare un amplificatore con guadagno  $G = 2$ . Il caso in cui il modo  $c$  è inizialmente vuoto è invece detto “generazione di seconda armonica”, in quanto vengono generati fotoni a frequenza doppia. In tal caso i fotoni creati nel modo  $c$  sono la metà di quelli annichiliti nel modo  $a$ , ovvero siamo in presenza di un meccanismo di attenuazione del numero di fotoni. Analogamente al caso non degenere, l'Hamiltoniana di interazione (3.40) costituisce un'approssimazione dell'Hamiltoniana dell'amplificatore numero ideale con  $G = 2$  nel limite di costante di accoppiamento indipendente dal segnale incidente. Se consideriamo il modo  $c$  come pompa classica si ottiene l'Hamiltoniana dell'amplificatore phase sensitive, descritta nel capitolo precedente.

Le Hamiltoniane dei vari processi sopra descritti sono riportate in tabella 3.1, mentre in tabella 3.2 sono riassunte le condizioni iniziali che caratterizzano ciascun processo.

	<i>Processo</i>	Hamiltoniana
PIA	amplificazione phase-insensitive	$a^\dagger b^\dagger + ab$
FC	conversione di frequenza	$a^\dagger c + ac^\dagger$
DIF	generazione di frequenze differenza	$a^\dagger b^\dagger c + abc^\dagger$
SUM	generazione di frequenza somma	$a^\dagger b^\dagger c + abc^\dagger$
PSA	amplificazione phase-sensitive	$a^{\dagger 2} + a^2$
SUH	generazione di sub-armonica	$a^2 c^\dagger + a^{\dagger 2} c$
SEH	generazione di seconda armonica	$a^2 c^\dagger + a^{\dagger 2} c$

Tabella 3.1: Riassunto delle Hamiltoniane dei processi parametrici trilineari.

I processi trilineari con tutti i modi inizialmente non vuoti sono detti “miscelatori a tre onde”; tali processi non corrispondono a dispositivi ottici elementari e non sono quindi stati presi in considerazione in questo lavoro di tesi.

### 3.4 Generazione di seconda/sub-armonica

In questo paragrafo vengono analizzati i processi di generazione di seconda armonica e di sub armonica in una trattazione interamente quantistica. Tali processi sono descritti dall’Hamiltoniana di interazione (3.40) e differiscono tra loro per la scelta delle condizioni iniziali, come mostrato nella tabella 3.2.

La costante del moto (3.41) suddivide lo spazio di Hilbert totale nella somma diretta di sottospazi indipendenti di dimensione finita corrispondenti agli autovalori  $C$  dell’operatore  $\hat{C}$ . Dopo aver determinato il valore di  $C$  in base alle condizioni iniziali, la dinamica del sistema si svolge all’interno del sottospazio corrispondente, individuato dai vettori

$$|n\rangle_C = |C - 2n, n\rangle, \quad n = 0, 1, \dots, [C/2]. \quad (3.44)$$

Nella base (3.44) la Hamiltoniana (3.40) assume la forma tridiagonale

$$\hat{H}|n\rangle_C = h_n^{(C)}|n-1\rangle_C + h_{n+1}^{(C)}|n+1\rangle_C, \quad (3.45)$$

<i>Processo</i>	$\langle \hat{n}_a \rangle_{in}$	$\langle \hat{n}_b \rangle_{in}$	$\langle \hat{n}_c \rangle_{in}$	$\mathcal{S}_{in}$	$\mathcal{S}_{out}$
PIA	$\neq 0$	0	classico	$\langle \hat{n}_a \rangle_{in}$	$\langle \hat{n}_a \rangle_{out} - (\mathcal{G} - 1)$
FC	$\neq 0$	classico	0	$\langle \hat{n}_a \rangle_{in}$	$\langle \hat{n}_c \rangle_{out}$
DIF	0	0	$\neq 0$	$\langle \hat{n}_c \rangle_{in}$	$\langle \hat{n}_a \rangle_{out} = \langle \hat{n}_b \rangle_{out}$
SUM	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\langle \hat{n}_a \rangle_{in} = \langle \hat{n}_b \rangle_{in}$	$\langle \hat{n}_c \rangle_{out}$
PSA	$\neq 0$	classico	—	$\langle \hat{n}_a \rangle_{in}$	$\langle \hat{n}_a \rangle_{out}$
SUH	0	—	$\neq 0$	$\langle \hat{n}_c \rangle_{in}$	$\langle \hat{n}_a \rangle_{out}$
SEH	$\neq 0$	—	0	$\langle \hat{n}_a \rangle_{in}$	$\langle \hat{n}_c \rangle_{out}$

Tabella 3.2: Riassunto dei processi parametrici trilineari in rivelazione diretta (vedi tab. 3.1).

dove

$$h_n^{(C)} = \sqrt{n(C - 2n + 1)(C - 2n + 2)}, \quad (3.46)$$

particolarmente adatta a una diagonalizzazione numerica efficiente. I processi di generazione di seconda armonica e sub armonica sono stati quindi analizzati numericamente in rivelazione diretta (come controllo sono stati riprodotti alcuni dei risultati ottenuti nel lavoro [72]). I segnali considerati all'ingresso e all'uscita sono riportati caso per caso nella tabella 3.2.

Variando il numero di fotoni in ingresso  $n_{in}$  si è scoperto che la dipendenza temporale del segnale è periodica o quasi periodica per valori di  $n_{in}$  piccoli, mentre diventa sempre più irregolare e irreversibile per segnali in ingresso intensi.

In Fig. 3.3 è mostrato un esempio di evoluzione del segnale di uscita e delle corrispondenti fluttuazioni in rivelazione diretta per uno stato numero con  $n_{in} = 20$  fotoni in ingresso (la variabile temporale  $\tau$  è normalizzata secondo la suscettività nonlineare  $\chi^{(2)}$  del mezzo). Si riscontrano differenze qualitative considerevoli tra il caso di generazione di sub armonica e quello di seconda armonica. Nel primo caso il segnale in uscita mostra diversi massimi locali, che corrispondono ad elevate fluttuazioni, mentre i valori di rumore minori si verificano in corrispondenza di bassi valori del segnale. In generale, il primo massimo locale del segnale non è il massimo assoluto.

Nel caso di generazione di seconda armonica, al contrario, il primo massimo locale

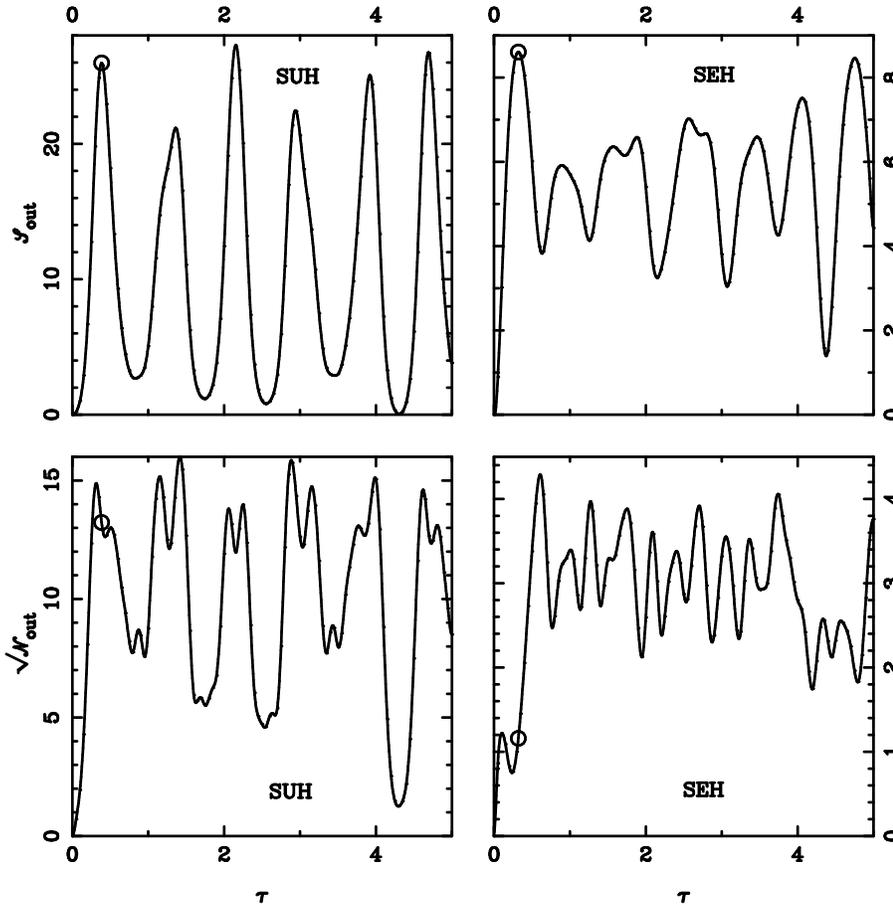


Figura 3.3: Evoluzione temporale del segnale in uscita  $\mathcal{S}_{out}$  e delle fluttuazioni  $\mathcal{N}_{out}$  in processi di generazione di sub-armonica e seconda armonica per uno stato numero in ingresso con  $n = 20$ .

nel segnale in uscita coincide con il massimo assoluto e le fluttuazioni corrispondenti assumono valori piuttosto bassi, minori rispetto all'evoluzione successiva (e decrescenti all'aumentare di  $n_{in}$ ). Ad eccezione del caso di un solo fotone incidente, la conversione tra i due modi in gioco non è mai completa in entrambi i processi. Ciò significa che il modo quantistico non vuoto in ingresso non si “svuota” mai completamente durante l'evoluzione per nessun valore di  $n_{in}$  e questo comporta necessariamente un rumore non nullo nel segnale di uscita. La conversione tra i due modi comunque è più efficace nel caso di seconda armonica. Il tempo di conversione ottimale  $\tau_*$  è per convenzione l'istante corrispondente al primo massimo locale del segnale in uscita, rappresentato dai cerchi nella figura

3.3 (si veda a questo proposito il paragrafo 3.6, in cui  $\tau_*$  è valutato analiticamente e confrontato con i risultati numerici).

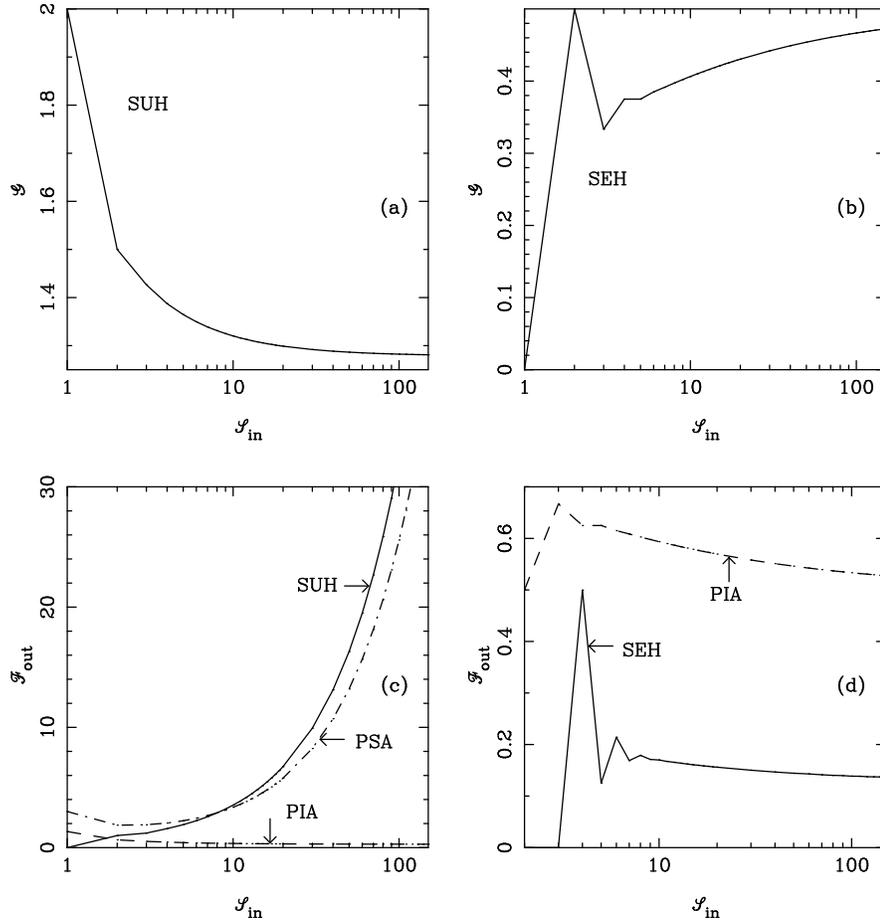


Figura 3.4: Guadagno  $\mathcal{G}$  e fattore di Fano in uscita  $\mathcal{F}_{out}$  per generazione di sub-armonica e di seconda armonica per stati numero in ingresso.

In Fig. 3.4 sono presentati gli andamenti del guadagno e del fattore di Fano in uscita corrispondenti al tempo di conversione  $\tau_*$  per stati numero in funzione del numero di fotoni in ingresso. Contrariamente a quanto suggerito in [85], nel caso di generazione di sub armonica il guadagno è una funzione decrescente del numero di fotoni in ingresso e raggiunge il valore asintotico  $\mathcal{G} \simeq 1.28$  per segnali elevati, ben lontano dal valore ideale  $\mathcal{G} = 2$ . Il corrispondente fattore di Fano aumenta al crescere del numero di fotoni in ingresso e presenta un andamento asintoticamente lineare (che non è molto evidente nella figura a causa della scala semilogaritmica).

Nella figura è riportato anche l'andamento del fattore di Fano per l'amplificatore phase insensitive, dato dall'equazione (2.46), e quello phase sensitive, descritto dall'equazione (2.78), calcolati a parità di guadagno. Il processo di generazione di sub armonica risulta meno efficiente di entrambi i tipi di amplificatore lineare; in particolare il più adatto ad amplificare stati numero risulta essere il PIA (si noti che comunque questo risultato si riferisce a guadagni molto piccoli).

Il processo di generazione di seconda armonica invece è molto più efficace del processo di sub armonica. Il guadagno (o fattore di deamplificazione) raggiunge infatti il valore ideale  $\mathcal{G} = \frac{1}{2}$  per segnali in ingresso intensi e il fattore di Fano tende al valore asintotico  $\mathcal{F}_{out} = 0.13$ , molto migliore dei valori ottenuti con un amplificatore phase insensitive.

In Fig. 3.5 sono mostrati il guadagno e la figura di rumore al tempo di conversione ottimale per stati coerenti in ingresso. Per quanto riguarda il guadagno, valgono le stesse considerazioni svolte a proposito degli stati numero. Dall'andamento della figura di rumore invece, calcolata anche in questo caso a parità di guadagno (utilizzando l'espressione completa (2.43) con il modo idler vuoto nel caso del PIA e l'equazione (2.77) nel caso del PSA), risulta più evidente che la generazione di sub armonica è un processo molto "rumoroso", mentre quella di seconda armonica è molto più efficiente e riesce a raggiungere figure di rumore al di sotto del limite quantico di 3dB (comunque maggiori del limite ideale dato dall'amplificatore ideale descritto nel paragrafo 3.1).

Come già accennato, l'origine del rumore aggiunto è legata al fatto che il modo di "pompa quantistico" (quello non vuoto in ingresso) non viene convertito completamente nel modo amplificato e dà luogo a fluttuazioni non nulle nel segnale in uscita. Questo meccanismo è l'analogo dell'emissione parametrica spontanea negli amplificatori parametrici lineari.

Il confronto con il funzionamento degli amplificatori lineari ha mostrato che nel caso di amplificazione, a parità di guadagno, il più conveniente è il PSA, mentre la generazione di sub armonica dà i risultati peggiori. Come è già stato accennato nel capitolo precedente, la miglior prestazione del PSA per stati coerenti è dovuta al fatto che questo amplificatore è adatto ad amplificare segnali con fase definita, mentre per stati numero, che non hanno fase definita, risulta più conveniente il PIA in quanto amplifica le quadrature del campo in modo isotropo, indipendentemente cioè dalla fase. Per quanto riguarda il caso di attenuazione, le prestazioni migliori sono ancora quelle del PSA, ma il processo di generazione di seconda armonica è risultato abbastanza efficiente, più conveniente rispetto al

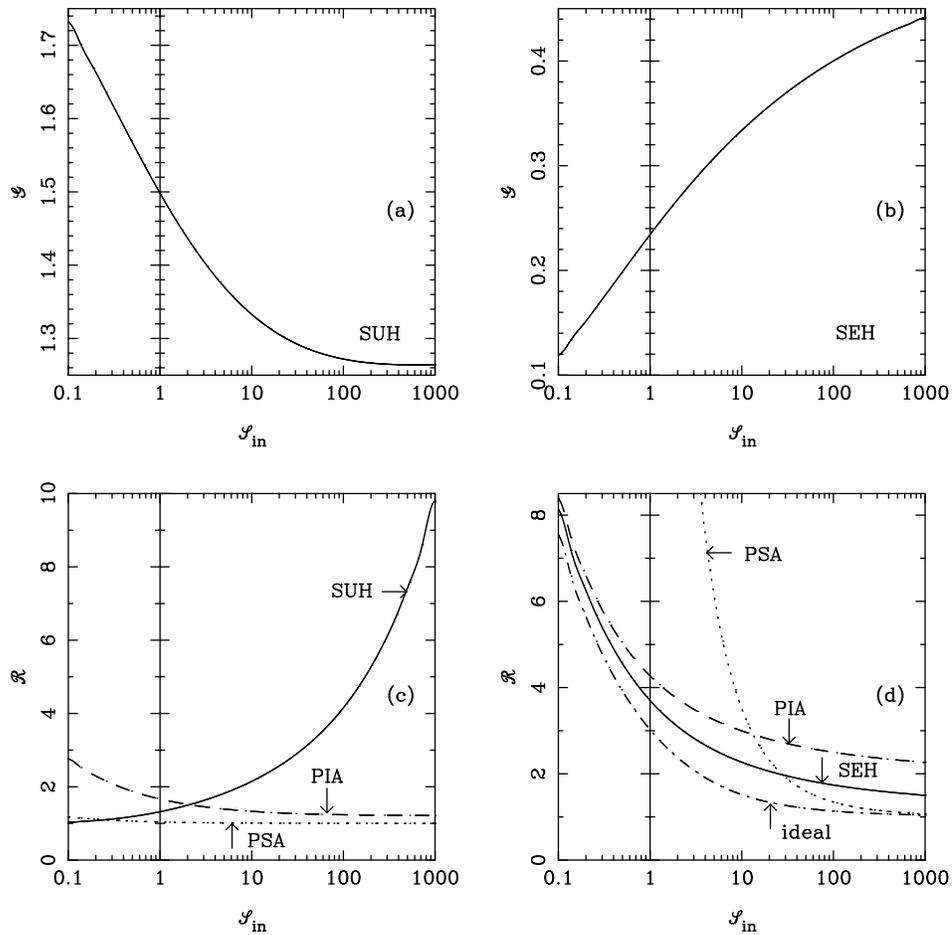


Figura 3.5: Guadagno  $\mathcal{G}$  e figura di rumore  $\mathcal{R}$  per generazione di sub-armonica e seconda armonica per stati coerenti in ingresso.

PIA.

L'analisi delle prestazioni del processo di sub armonica ha mostrato come non si possa trascurare nella Hamiltoniana (3.23) la dipendenza dell'accoppiamento dall'intensità della radiazione per potersi avvicinare a un comportamento di amplificazione ideale. Tale dipendenza assume la forma tipica di sistemi atomici interagenti con il campo elettromagnetico in presenza di meccanismi di saturazione, che verranno analizzati nel prossimo capitolo.

### 3.5 Generazione di frequenze somma e differenza

I processi di generazione di frequenza somma e differenza corrispondono all'Hamiltoniana (3.36) e differiscono per la scelta delle condizioni iniziali, come mostrato in Tabella 3.2.

Le costanti del moto  $\hat{C}_1$  and  $\hat{C}_2$  nelle equazioni (3.37)-(3.38) si possono riscrivere nella forma più conveniente

$$\hat{S} \equiv \frac{1}{2}(\hat{C}_1 + \hat{C}_2) = \frac{1}{2}(a^\dagger a + b^\dagger b + 2c^\dagger c) , \quad (3.47)$$

$$\hat{D} \equiv \frac{1}{2}(\hat{C}_1 - \hat{C}_2) = b^\dagger b - a^\dagger a . \quad (3.48)$$

Per analizzare le prestazioni di questi processi come duplicatori e ricombinatori di numero di fotoni lo spazio di Hilbert di interesse è quello corrispondente all'autovalore  $D = 0$ . Dopo aver fissato il secondo autovalore  $S$  in base alle condizioni iniziali, il sottospazio corrispondente è individuato dagli autovettori

$$|n\rangle_S = |S - n, S - n, n\rangle , \quad (3.49)$$

e per il valore di  $S$  considerato l'Hamiltoniana di interazione (3.36) assume la forma tridiagonale

$$\hat{H}|n\rangle_S = h_n^{(S)}|n - 1\rangle_S + h_{n+1}^{(S)}|n + 1\rangle_S , \quad (3.50)$$

dove

$$h_n^{(S)} = \sqrt{n}(S - n + 1) . \quad (3.51)$$

L'evoluzione dei campi è stata analizzata numericamente mediante la diagonalizzazione della (3.50). Come controllo della validità del metodo sono stati riprodotti alcuni dei risultati ottenuti nei lavori [74, 32].

In Fig. 3.6 sono riportati il guadagno e il fattore di Fano per stati numero in ingresso. Il guadagno è definito rispetto a uno dei due modi duplicati in uscita. I risultati ottenuti sono qualitativamente molto simili a quelli del caso di generazione di seconda/sub armonica: non si raggiunge mai la conversione completa tra i modi coinvolti nell'interazione (a parte il caso di duplicazione di un fotone in

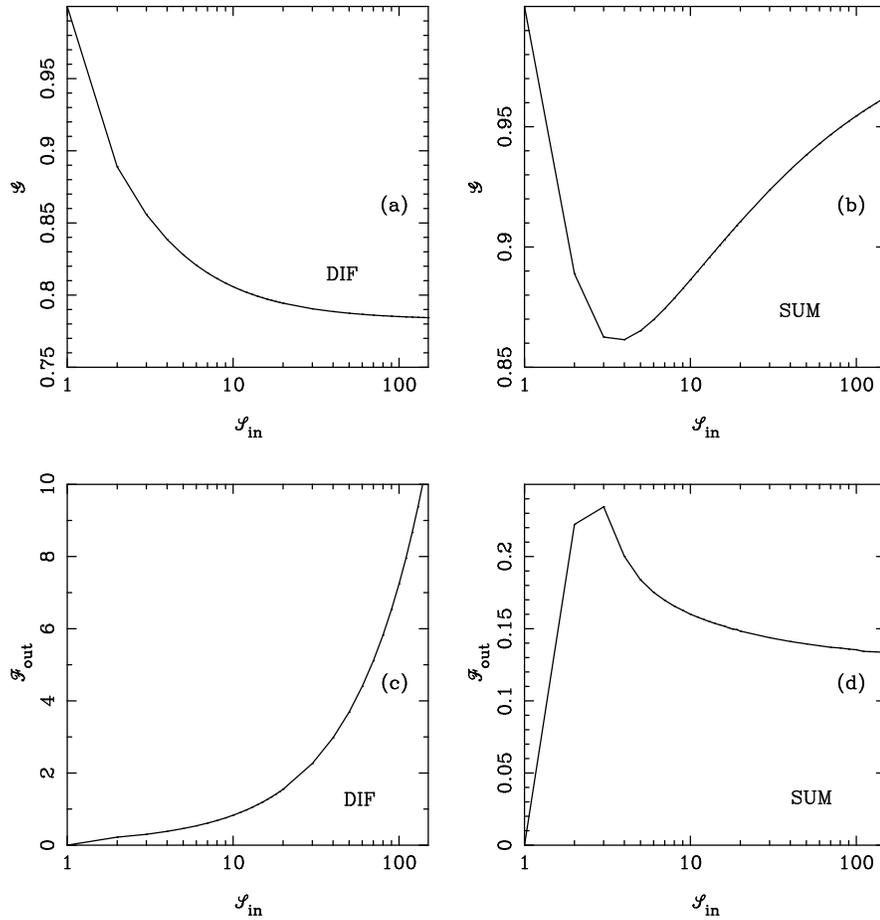


Figura 3.6: Guadagno  $\mathcal{G}$  e fattore di Fano in uscita  $\mathcal{F}_{out}$  per generazione di frequenze differenza e somma per stati numero in ingresso.

ingresso) e questo dà origine a rumore nel segnale in uscita. Anche in questo caso si è scelto come tempo di conversione ottimale quello corrispondente al primo massimo locale del segnale in uscita. Il guadagno nel processo di generazione di frequenze differenza è una funzione decrescente del numero di fotoni incidenti e raggiunge il valore asintotico  $\mathcal{G} = 0.78$ . Il fattore di Fano corrispondente è invece una funzione crescente (quasi lineare) del segnale in entrata: le prestazioni di questo processo sono quindi ben lontane da quelle del duplicatore ideale di fotoni descritto nel paragrafo 3.2.

Il processo di generazione di frequenza somma invece è risultato molto più efficiente. Come si osserva nella figura infatti il limite ideale  $\mathcal{G} = 1$  viene raggiunto per segnali intensi e il fattore di Fano è una funzione decrescente del

numero di fotoni in ingresso e tende asintoticamente al valore  $\mathcal{F}_{out} = 0.13$  raggiunto nel caso di generazione di seconda armonica. Per segnali intensi quindi il processo di generazione di frequenza somma offre delle ottime prestazioni come ricombinatore.

Per quanto riguarda il caso di stati coerenti in ingresso, si ottengono andamenti del guadagno e della figura di rumore molto simili a quelli analizzati nel paragrafo precedente, ma non sono di grande interesse in quanto gli stati coerenti non possono venire duplicati nemmeno idealmente.

### 3.6 Tempo di conversione in un'approssimazione di campo medio

In questo paragrafo viene calcolato analiticamente il tempo di conversione  $\tau_*$  per i processi trilineari analizzati nei paragrafi precedenti in un'approssimazione di "campo medio" [21]. Tale metodo è basato su una procedura di linearizzazione proposta nel lavoro [48], nella quale le Hamiltoniane di interazione (3.36)-(3.40) vengono approssimate in un modo autoconsistente da quelle ideali. Come si vedrà nel seguito, tale procedura risulta corretta soltanto nel limite di numero di fotoni elevato nei modi amplificati (duplicati) ed è quindi adatta a descrivere solo i processi inversi (attenuazione e ricombinazione). La limitazione maggiore che questo metodo presenta consiste nel fatto che descrive una conversione completa tra i modi coinvolti nell'interazione e perciò non permette di calcolare le fluttuazioni quantistiche del segnale in uscita e il valore del guadagno effettivo.

Il punto di partenza consiste nel riscrivere le Hamiltoniane (3.36) e (3.40) in una forma simile alle Hamiltoniane ideali (3.19) e (3.30), ovvero

$$\hat{H}_I = f(a^\dagger a) A c^\dagger + A^\dagger f(a^\dagger a) c, \quad (3.52)$$

dove

$$A = \begin{cases} a_{(2)} & \text{(PNA)}, \\ a_{(1,1)} & \text{(PND)} \end{cases}, \quad (3.53)$$

e

$$f(x) = \begin{cases} (2x + 3 - (-1)^x)^{\frac{1}{2}} & \text{(PNA)}, \\ (x + 1)^{\frac{1}{2}} & \text{(PND)}. \end{cases} \quad (3.54)$$

Le espressioni (3.54) derivano dalla forma degli operatori di creazione  $a_{(2)}$  e  $a_{(1,1)}$ , in particolare quella relativa al PNA coincide per valori interi di  $x$  con la (3.8) per  $G = 2$  [48]. La funzione operatoriale  $f(a^\dagger a)$  sarà trattata come costante di accoppiamento (c-numero) dipendente dal tempo, da determinarsi *a posteriori* in modo autoconsistente. La Hamiltoniana (3.52) può allora essere riscritta nella forma seguente

$$\hat{H}_I = f(a^\dagger a)Ac^\dagger + f(a^\dagger a - \nu)A^\dagger c, \quad (3.55)$$

dove è stato introdotto il numero intero  $\nu$

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{(PNA)}, \\ 2 & \text{(PND)}, \end{cases} \quad (3.56)$$

allo scopo di condurre una descrizione unificata dei processi di attenuazione e ricombinazione. L'Hamiltoniana (3.55) può essere riscritta in approssimazione "di campo medio", considerando cioè il valore intermedio  $\bar{f}(a^\dagger a) = f(a^\dagger a - \frac{\nu}{2})$  tra le forme in cui compare nell'espressione (3.55) e calcolandone il valore di aspettazione sullo stato di ingresso. Si ottiene in tal modo

$$\hat{H}_{MF} = \bar{f}(n_a(\tau)) [Ac^\dagger + A^\dagger c], \quad (3.57)$$

dove

$$n_a(\tau) = \langle a^\dagger(\tau)a(\tau) \rangle, \quad (3.58)$$

e, trascurando il termine oscillante  $(-1)^{n_a(\tau)}$  nella (3.54),

$$\bar{f}(x) = \sqrt{\nu \left( x + \frac{1}{2} \right)}. \quad (3.59)$$

Nella descrizione di interazione l'evoluzione temporale di un generico operatore  $\hat{O}$  è data da

$$\hat{O}(\tau) \simeq \exp(i\hat{H}_{av}\tau) \hat{O} \exp(-i\hat{H}_{av}\tau), \quad (3.60)$$

dove  $\hat{H}_{av}$  rappresenta la media temporale dell'Hamiltoniana

$$\hat{H}_{av} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \hat{H}_{MF}(\tau') d\tau' = \frac{\theta(\tau)}{\tau} (Ac^\dagger + A^\dagger c), \quad (3.61)$$

con

$$\theta(\tau) = \int_0^\tau \bar{f}(n_a(\tau')) d\tau'. \quad (3.62)$$

L'evoluzione degli operatori  $A$  e  $c$  è data allora dalla semplice espressione

$$A(\tau) = A \cos \theta(\tau) + ic \sin \theta(\tau) \quad (3.63)$$

$$c(\tau) = c \cos \theta(\tau) + iA \sin \theta(\tau) . \quad (3.64)$$

A questo punto si può valutare  $n_a(\tau)$  in modo autoconsistente. Dalla (3.63) si ottiene

$$n_A(\tau) = \langle A^\dagger(\tau)A(\tau) \rangle = \langle A^\dagger A \rangle \cos^2 \theta(\tau) . \quad (3.65)$$

Nel caso di attenuazione, il valore di aspettazione  $n_A$  per segnali intensi in ingresso ( $n_i \gg 1$ ) può essere approssimato come segue

$$n_A = [n_a/2] \simeq n_a/2 . \quad (3.66)$$

Dalle equazioni (3.62) e (3.65) si ottiene la seguente equazione integrale per  $n_a(\tau)$

$$n_a(\tau) = n_i \cos^2 \theta(\tau) = n_i \cos^2 \int_0^\tau \bar{f}(n_a(\tau')) d\tau' . \quad (3.67)$$

Differenziando tale equazione si ricava

$$\sqrt{\nu} d\tau = d\theta \left( n_i \cos^2 \theta + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} . \quad (3.68)$$

Dalle equazioni (3.63) e (3.67) si vede che si può arrivare alla conversione totale tra i modi  $A$  e  $c$  (quando  $n_a = 0$ ) al tempo  $\tau = \tau_*$  tale che

$$\theta(\tau_*) = \frac{\pi}{2} . \quad (3.69)$$

Integrando l'equazione (3.68) tra  $\theta = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$  il tempo di conversione in funzione del numero di fotoni in ingresso  $n_i$  assume la forma

$$\tau_* = \nu^{-\frac{1}{2}} \left( n_i + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} K \left( \frac{n_i}{n_i + \frac{1}{2}} \right) , \quad (3.70)$$

dove  $K(k)$  indica l'integrale ellittico completo di Jacobi

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} dx . \quad (3.71)$$

Sfruttando il comportamento asintotico

$$K(k) \sim -\log \sqrt{1-k} \quad (3.72)$$

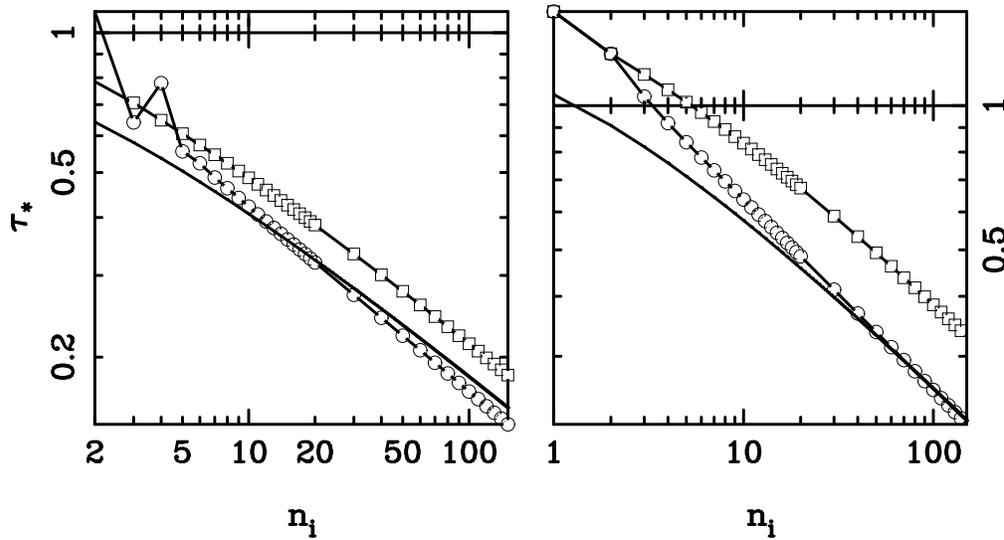


Figura 3.7: Tempo di conversione  $\tau_*$  per i processi di generazione di sub-armonica (a sinistra, rappresentata coi quadrati), di seconda armonica (a sinistra, rappresentata coi cerchi), di frequenza somma (a destra, rappresentata coi quadrati) e di frequenze differenza (a destra, rappresentata coi cerchi). La curva piena riporta i risultati analitici.

per  $k \rightarrow 1$ , per numeri di fotoni  $n_i$  elevati si ricava l'espressione

$$\tau_* \sim \frac{1}{2} \nu^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \log n. \quad (3.73)$$

In Fig. 3.7 è riportato l'andamento analitico (rappresentato dalla curva continua) del tempo di conversione  $\tau_*$  in funzione del numero di fotoni in ingresso nel caso dell'attenuatore e del ricombinatore. Come si può osservare, l'accordo con i risultati numerici (rappresentati in figura coi cerchietti) è soddisfacente.

# Capitolo 4

## Amplificatori saturabili

Questo capitolo è dedicato allo studio del funzionamento di amplificatori ottici saturabili in un approccio basato su equazioni di Fokker-Planck. Data l'impossibilità di risolvere analiticamente tali equazioni in presenza di fenomeni non lineari di saturazione, occorre affrontare il problema numericamente. È stato quindi sviluppato un metodo di simulazione Monte Carlo delle equazioni di Fokker-Planck in ottica quantistica [18, 20], descritto nel primo paragrafo. La validità di tale metodo è stata controllata su due esempi specifici: un modello semplice di amplificatore ad onda viaggiante e l'equazione di Van Der Pol per il laser in prossimità della soglia.

Si analizza infine il caso più interessante di amplificatori saturabili in un modello molto sofisticato, che tiene conto in modo molto dettagliato dei meccanismi di saturazione presenti all'interno del dispositivo, e si dimostra in particolare che il limite quantico alla figura di rumore degli amplificatori phase insensitive lineari in rivelazione diretta può essere ampiamente superato scegliendo in modo opportuno i parametri di funzionamento dell'amplificatore [24].

### 4.1 Simulazione Monte Carlo dell'equazione di Fokker-Planck

I metodi di simulazione Monte-Carlo sono stati introdotti recentemente in ottica quantistica per trattare sistemi non lineari complessi. In particolare, sono stati sviluppati metodi di simulazione Monte Carlo della funzione d'onda [38] che portano a soluzioni numeriche della “master equation”, un'equazione operatoriale

per la matrice densità di un sistema aperto che interagisce in modo irreversibile con un bagno (v. capitolo 5). Questo approccio non è però adatto per numeri di fotoni elevati perchè funziona su uno spazio di Hilbert a dimensione finita. Ciò ne impedisce l'applicazione a molte situazioni di interesse pratico, che si presentano ad esempio studiando laser o amplificatori ottici.

Con la sola eccezione del caso di numeri di fotoni molto piccoli, un approccio basato su equazioni di Fokker-Planck si presta meglio del precedente a trattare sistemi complessi senza limitazioni all'intensità dei segnali incidenti. In questo paragrafo viene presentato un nuovo metodo numerico per risolvere le equazioni di Fokker-Planck in ottica quantistica, basato su una simulazione Monte Carlo dei processi di diffusione probabilistica [18, 20].

La forma più generale di equazione di Fokker-Planck è la seguente

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left[ -\sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} Q_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}(\mathbf{x}) \right] P(\mathbf{x}, t) . \quad (4.1)$$

dove  $P(\mathbf{x}, t)$  è una distribuzione di probabilità (o una quasi-probabilità) nello spazio  $d$ -dimensionale  $\mathbf{R}^d$  generato dai vettori  $\mathbf{x}$ , mentre  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  sono rispettivamente il vettore di “drift” e la matrice di diffusione.

A seconda della forma analitica dei termini di drift e di diffusione, l'equazione di Fokker-Planck descrive un'ampia classe di fenomeni in ottica quantistica e fornisce un trattamento accurato delle fluttuazioni di origine quantistica in presenza di effetti non lineari. Il vettore  $\mathbf{x}$  può rappresentare ad esempio un insieme di numeri di fotoni per distinti modi della radiazione, oppure un insieme di parti reali e immaginarie delle ampiezze di campi complessi: il primo caso corrisponde a una distribuzione di probabilità nella rappresentazione numero, mentre il secondo descrive l'evoluzione di una distribuzione di probabilità di Wigner (v. paragrafo A.2).

L'equazione di Fokker-Planck (4.1) è risolubile analiticamente soltanto in pochi casi semplici, come ad esempio il caso di coefficienti di drift e di diffusione costanti, che si vedrà nel seguito, o nel caso di drift lineare in  $\mathbf{x}$  e coefficiente di diffusione costante, che descrive il funzionamento di dispositivi lineari e verrà analizzato nel capitolo 5. In generale, per vettori di drift e matrici di diffusione arbitrari la (4.1) può essere risolta analiticamente al più in condizioni particolari, come ad esempio il caso di regime stazionario. Nello studio del processo di amplificazione invece interessa tipicamente valutare la dinamica del sistema nel transiente. Lo stato stazionario infatti è unico per processi derivanti da master

equation di tipo markoviano e corrisponde perciò all'annullamento di una qualsiasi modulazione all'uscita del dispositivo: in condizioni di stazionarietà quindi i meccanismi di amplificazione vengono completamente annientati. L'evoluzione completa del sistema in generale può essere trattata solo numericamente: il metodo di simulazione Monte Carlo che verrà presentato in questo paragrafo è stato sviluppato specificamente per studiare sistemi complessi in presenza di meccanismi altamente non lineari, come vedremo nel corso di questo capitolo. Tale metodo risulta particolarmente efficiente per sistemi multimodali, per i quali i metodi tradizionali di integrazione diretta rendono proibitivo il calcolo delle quantità di interesse.

Il metodo è applicabile al caso in cui sia la matrice di diffusione sia la distribuzione di probabilità  $P(\mathbf{x}, t)$  sono positive. Nel caso più generale di probabilità non definite positive, come ad esempio la funzione  $P$  di Glauber-Sudarshan, il metodo può essere utilizzato quando le condizioni iniziali della quasi-probabilità considerata e la forma della matrice di diffusione assicurano un'evoluzione positiva a tutti gli istanti successivi, come vedremo ad esempio nel caso dell'equazione di Van Der Pol discussa nel paragrafo 4.3.

Per capire come funziona il metodo di simulazione consideriamo il caso unidimensionale con coefficienti di drift e di diffusione costanti

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -Q \frac{\partial}{\partial x} P(x, t) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t). \quad (4.2)$$

La soluzione analitica della (4.2) può essere ricavata facilmente sfruttando l'equazione differenziale corrispondente per la trasformata di Fourier

$$\tilde{P}(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x, t) e^{ikx}, \quad (4.3)$$

data da

$$\frac{\partial \tilde{P}(k, t)}{\partial t} = iQk \tilde{P}(k, t) - Dk^2 \tilde{P}(k, t). \quad (4.4)$$

La (4.4) ha soluzione

$$\tilde{P}(k, t) = C e^{-(Dk^2 - iQk)t}. \quad (4.5)$$

Per condizione iniziale deltiforme

$$P(x, 0) = \delta(x - x'), \quad (4.6)$$

il coefficiente  $C$  assume la forma  $C = e^{ikx'}$  e la soluzione della (4.2) è data da

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left[ -\frac{(x - x' - Qt)^2}{4Dt} \right]. \quad (4.7)$$

Tenendo presente la relazione

$$P(\mathbf{x}, 0) = \int_{\mathbf{R}^d} d\mathbf{x}' P(\mathbf{x}', 0) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.8)$$

e sfruttando la (4.7), la soluzione dell'equazione generale (4.1) per un'evoluzione infinitesima si può scrivere nel modo seguente

$$P(\mathbf{x}, t + \delta t) = \int_{\mathbf{R}^d} d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \delta t) P(\mathbf{x}', t), \quad (4.9)$$

dove la funzione di Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t)$ , che agisce come probabilità di transizione per  $P(\mathbf{x}, t)$ , è soluzione dell'equazione (4.1) con condizione iniziale deltiforme  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ , cioè

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; \delta t) = \left( \det \mathbf{D} (2\pi \delta t)^d \right)^{-1/2} \times \exp \left[ -(\mathbf{x}' - \mathbf{x} + \mathbf{Q} \delta t) \cdot (2\delta t \mathbf{D})^{-1} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x} + \mathbf{Q} \delta t) \right]. \quad (4.10)$$

Per ottenere l'evoluzione della probabilità a tempi finiti in linea di principio si potrebbe iterare la (4.9) per intervalli di tempo piccoli, ma il forte dispendio di tempo di calcolo (che è una funzione esponenziale del numero di dimensioni), già per dimensioni  $d \geq 2$ , rende impraticabile l'integrazione diretta. Il metodo Monte Carlo evita il problema dell'integrazione (4.9) simulando l'evoluzione della distribuzione di probabilità per ciascun punto  $\mathbf{x}$  secondo il processo Gaussiano rappresentato dalla funzione di Green (4.10).

La distribuzione di probabilità  $P(\mathbf{x}, t)$  al generico tempo  $t$  viene descritta mediante un ensemble statistico finito di  $N$  configurazioni  $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)\}$ , dette anche eventi, la cui densità dà appunto il profilo di  $P(\mathbf{x}, t)$ . Il campionamento statistico della probabilità iniziale  $P(\mathbf{x}, 0)$  si ottiene facilmente con algoritmi di Metropolis [49], in grado di generare numeri casuali distribuiti secondo una funzione assegnata.

L'evoluzione della probabilità si ottiene a partire dalla distribuzione iniziale per passi temporali successivi. In particolare, ogni punto  $x_i$  evolve dall'istante  $t$  a un istante successivo  $t + \delta t$  secondo il processo Gaussiano

$$\mathbf{x}_i(t + \delta t) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}_i(t)) \delta t + \mathbf{E}(t), \quad (4.11)$$

dove  $\mathbf{E}(t)$  rappresenta una distribuzione Gaussiana con valor medio nullo e varianza  $\mathbf{D}(\mathbf{x}_i(t))\delta t$ , in accordo alla (4.10). Nella (4.11) i valori di  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}_i(t))$  e  $\mathbf{D}(\mathbf{x}_i(t))$  vengono ridefiniti istante per istante in funzione dei valori assunti dalla configurazione di punti considerata  $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)\}$  all'istante precedente. Il metodo risulta pertanto equivalente a un approccio alla Langevin con un rumore localmente Gaussiano [8].

In una dimensione la (4.11) è direttamente implementabile, utilizzando semplici algoritmi di generazione di numeri random distribuiti secondo una Gaussiana unitaria. Per  $d > 1$ , nel caso in cui la matrice di diffusione nell'equazione di Fokker-Planck (4.1) non sia diagonale, occorre operare una trasformazione ortogonale che diagonalizza la matrice di diffusione e fattorizza così la funzione di Green. In questo modo i  $d$  processi di evoluzione Gaussiana diventano indipendenti tra loro e si può quindi applicare  $d$  volte la (4.11) relativa a una dimensione.

Vediamo ora come si calcolano i valori di aspettazione delle osservabili di interesse a partire dai dati simulati. Il valore medio  $\langle F(t) \rangle$  di una generica quantità fisica è per definizione la media della corrispondente funzione  $F(\mathbf{x}, t)$  sulla distribuzione di probabilità, ovvero:

$$\langle F(t) \rangle \equiv \int F(\mathbf{x})P(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} . \quad (4.12)$$

La corrispondente stima ottenuta con il metodo di simulazione  $\overline{F(t)}$  si ottiene mediando sull'insieme statistico degli eventi nel modo seguente

$$\overline{F(t)} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F(\mathbf{x}_i(t)) . \quad (4.13)$$

Il teorema del limite centrale assicura che i due valori medi (4.12) e (4.13) coincidono nel limite  $N \rightarrow \infty$ .

Per valutare correttamente gli errori associati al valor medio  $\overline{F(t)}$ , sono stati considerati  $N_c$  campioni statistici (detti anche blocchi) di  $N$  eventi ciascuno e sono state calcolate le medie per ciascun campione secondo la (4.13). Il valor medio della quantità fisica di interesse è stato calcolato come valor medio delle medie campionarie. Dopo aver verificato che per campioni sufficientemente popolati le medie campionarie si distribuiscono secondo una Gaussiana, l'errore è stato valutato come segue

$$\epsilon_F = \frac{1}{\sqrt{N_c}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_c} (\overline{F(t)}^2 - \overline{F(t)}^2)}{N_c}} . \quad (4.14)$$

Si noti come l'errore (4.14) sia una funzione decrescente del numero di campioni indipendentemente dal numero delle dimensioni del sistema. Questo è un notevole vantaggio del metodo di simulazione Monte Carlo rispetto agli algoritmi di integrazione diretta, in cui l'errore cresce esponenzialmente al crescere della dimensione  $d$ .

L'unica sorgente di errore sistematico nel metodo di simulazione presentato in questo paragrafo è rappresentata dalla scelta del tempo di evoluzione  $\delta t$  (necessariamente finito), dato che la funzione di Green (4.10) è soluzione esatta dell'equazione di Fokker-Planck (4.1) soltanto nel limite  $\delta t \rightarrow 0$ . Questo problema è stato risolto facendo evolvere gli eventi statistici per intervalli temporali diversi, scelti opportunamente a seconda della particolare equazione di Fokker-Planck in esame, ed estrapolando poi i risultati per  $\delta t \rightarrow 0$  mediante una procedura di interpolazione lineare.

Nel caso in cui esistono limitazioni alla diffusione degli eventi nello spazio considerato, come vedremo ad esempio nel paragrafo 4.2, è necessario introdurre dei vincoli al contorno. In questo lavoro sono state utilizzate delle tecniche di riflessione elastica in corrispondenza delle condizioni al contorno: in questo modo gli eventi simulati che finiscono fuori dai limiti previsti vengono "riflessi" all'interno del dominio.

Se interessa valutare proprietà del sistema allo stato stazionario, come ad esempio funzioni di correlazione dei campi o forme di riga (v. paragrafo 4.3), l'evoluzione delle configurazioni deve essere condotta fino a un tempo  $t_{max}$  sufficientemente lungo da garantire la stazionarietà del sistema, ma nello stesso tempo il time-step  $\delta t$  deve essere mantenuto breve per limitare gli errori sistematici, e ciò comporta un dispendio enorme di tempo di calcolo. È possibile allora ridurre i tempi di calcolo sfruttando la proprietà di ergodicità del sistema, ovvero l'equivalenza fra le medie sui campioni statistici e quelle temporali

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} d\tau x(\tau) = \langle x_i(t) \rangle, \quad (4.15)$$

valida per istanti di tempo  $t$  successivi al raggiungimento dello stato stazionario. Sfruttando la (4.15) è sufficiente far evolvere nel tempo un solo evento e, con accorgimenti simili al caso "dinamico", ricavare una statistica su campioni statistici temporali: le configurazioni associate a ciascun campione temporale sono costituite dai valori assunti da  $\mathbf{x}$  durante l'evoluzione in condizioni di regime stazionario. Ovviamente prima di adottare questa procedura è necessario stabilire

con esattezza l'istante in cui il sistema è arrivato effettivamente a regime, controllando la convergenza nel tempo delle quantità di interesse su un campione. Allo scopo di controllare l'affidabilità del metodo di simulazione nei due paragrafi che seguono vengono presi in considerazione due sistemi semplici in una e in due dimensioni rispettivamente: i risultati ottenuti mediante la simulazione numerica vengono messi a confronto con quelli ricavati da metodi di integrazione diretta nel caso di una dimensione e con quelli analitici nel caso bidimensionale.

## 4.2 Applicazione a un modello unidimensionale di TWOA

In questa prima applicazione del metodo di simulazione descritto nel paragrafo precedente si considera l'equazione di Fokker-Planck unidimensionale per un laser monomodale nel limite di grande numero di fotoni di saturazione. L'equazione di Fokker-Planck si ricava dalla seguente master equation (si veda [65]) per gli elementi diagonali della matrice densità nella rappresentazione numero (cioè la probabilità  $p_n$  di avere  $n$  fotoni)

$$\begin{aligned} C^{-1}\dot{p}(t)_n = & - (n+1) \left[ \frac{\theta_2}{1 + (n+1)/n_*} + \bar{n} \right] p_n(t) \\ & + n \left[ \frac{\theta_2}{1 + n/n_*} + \bar{n} \right] p_{n-1}(t) - n \left[ \frac{\theta_1}{1 + n/n_*} + (\bar{n} + 1) \right] p_n(t) \\ & + (n+1) \left[ \frac{\theta_1}{1 + (n+1)/n_*} + (\bar{n} + 1) \right] p_{n+1}(t), \end{aligned} \quad (4.16)$$

dove  $\theta_i = R_i/2C$  sono i parametri di “pompaggio” ( $C$  è il damping della cavità, mentre  $R_1$  e  $R_2$  rappresentano i *rate* di iniezione degli atomi rispettivamente sul livello eccitato e sul livello fondamentale),  $n_*$  è il numero di fotoni di saturazione e  $\bar{n}$  il numero di fotoni termici.

Se si considera la variabile  $n$  continua si possono espandere in serie di Taylor  $p_{n-1}(t)$  e  $p_{n+1}(t)$  fino al secondo ordine in  $n$  nel modo seguente

$$p_{n-1}(t) \simeq p_n(t) - \frac{\partial}{\partial n} p_n(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} p_n(t), \quad (4.17)$$

$$p_{n+1}(t) \simeq p_n(t) + \frac{\partial}{\partial n} p_n(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial n^2} p_n(t), \quad (4.18)$$

e, introducendo le variabili riscalate  $\nu = \frac{n}{n_*}$  e  $\tau = tC$ , si ottiene l'equazione di Fokker-Planck unidimensionale

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(\nu, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \nu} [Q(\nu)P(\nu, \tau)] + \frac{1}{2n_*} \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} [D(\nu)P(\nu, \tau)]. \quad (4.19)$$

I coefficienti di drift e di diffusione assumono la forma

$$\begin{aligned} Q(\nu) &= (\nu + n_*^{-1}) [\bar{n} + \theta_1(1 + \nu + n_*^{-1})^{-1}] \\ &\quad - \nu [1 + \bar{n} + \theta_2(1 + \nu)^{-1}], \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} D(\nu) &= \frac{1}{2n_*} \left\{ (\nu + n_*^{-1}) [\bar{n} + \theta_1(1 + \nu + n_*^{-1})^{-1}] \right. \\ &\quad \left. + \nu [1 + \bar{n} + \theta_2(1 + \nu)^{-1}] \right\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

L'equazione di Fokker-Planck (4.19) fornisce un semplice modello di amplificatore ottico ad onda viaggiante (TWOA), che si realizza fisicamente con un laser a riflettività molto bassa, in modo che il segnale venga amplificato in cavità e non ne rimanga intrappolato. Il modello può equivalentemente descrivere un amplificatore a fibra drogata, con un'attenuazione trascurabile del modo di pompa all'interno del dispositivo. Si tratta comunque di un modello più sofisticato rispetto a quello introdotto nel paragrafo 2.5, valido soltanto in regime di funzionamento lineare. In questo modello, come è già stato anticipato nel paragrafo precedente, si incontra il problema della diffusione dei punti al di là dei limiti del dominio  $\nu \geq 0$ . È necessario allora introdurre dei controlli per evitare questo inconveniente: si è scelto di "riflettere" elasticamente all'interno del dominio gli eventi corrispondenti a valori negativi.

In Fig. 4.1 è mostrato un esempio dell'evoluzione della distribuzione di probabilità  $P(\nu, \tau)$  corrispondente a uno stato coerente in ingresso con  $\langle \hat{n} \rangle_0 = 100$  per tre istanti di tempo successivi. Come si può osservare, la distribuzione sta raggiungendo lo stato stazionario. Gli istogrammi rappresentano le distribuzioni degli eventi simulati, mentre le linee continue corrispondono alle curve ottenute con metodi di integrazione diretta della (4.19), in ottimo accordo con i risultati della simulazione. Per questo modello, essendo unidimensionale, è stato possibile un confronto diretto con i metodi convenzionali di integrazione numerica. Per dimensioni maggiori invece tali metodi comportano un tale dispendio di tempo di calcolo (esponenziale nel numero delle dimensioni) che sono praticamente impronibili.

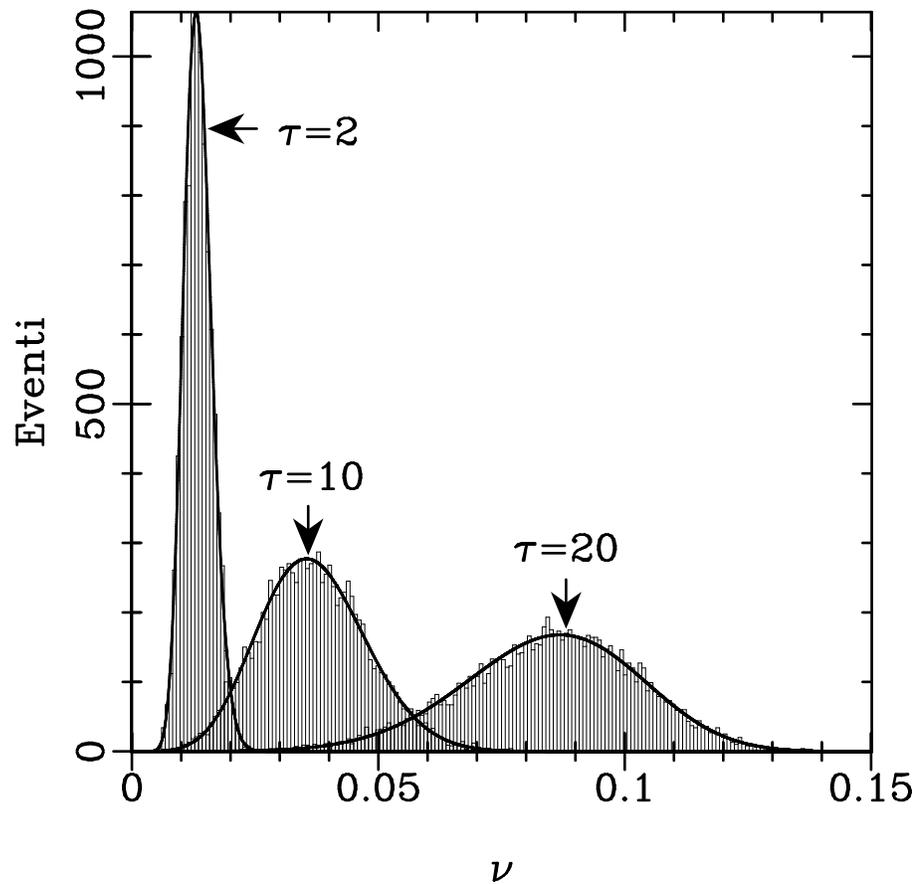


Figura 4.1: Evoluzione della distribuzione di probabilità ai tempi  $\tau = 2, 10,$  e  $20$  per uno stato coerente in ingresso. Gli istogrammi rappresentano i risultati della simulazione, la linea continua quelli ottenuti per integrazione numerica.

Come applicazione a un sistema reale è stato simulato il comportamento dell'amplificatore a onda viaggiante analizzato in [68]. I parametri di funzionamento corrispondenti si possono ricavare dalla tabella 4.1 tenendo presenti le relazioni  $A/C = \theta_1$ ,  $B/C = \theta_2$  e  $C = 2\kappa$ ; è stato considerato il caso con  $\bar{n} = 0$ . Sono stati calcolati in particolare il guadagno e la figura di rumore in rivelazione diretta, mostrati nella Fig. 4.2.

Il numero di campioni statistici utilizzati nella simulazione è stato scelto in modo da avere una statistica consistente con errori sufficientemente piccoli: come si osserva dalla figura le barre di errore sono quasi sempre comprese nei quadrati che racchiudono i risultati ottenuti. Gli andamenti mostrati in questa figura risulta-

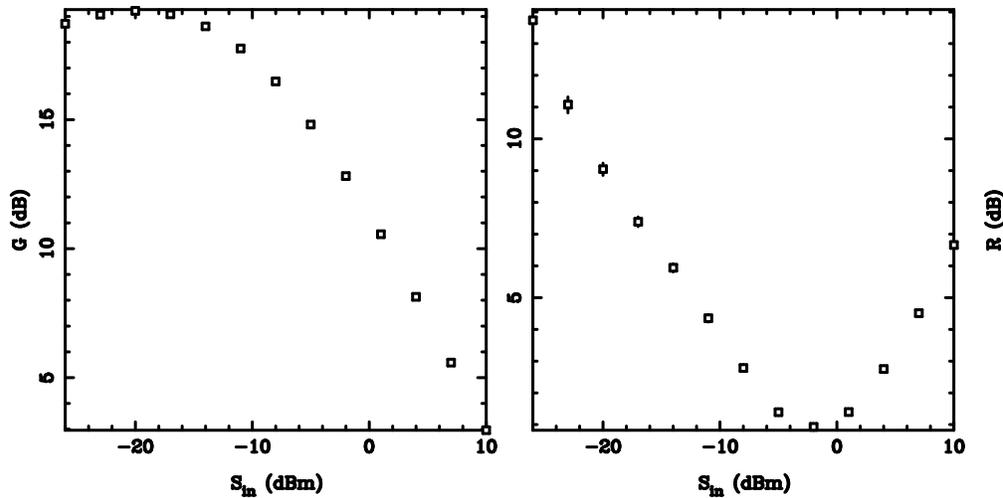


Figura 4.2: Guadagno  $G$  e figura di rumore  $F$  in decibel ( $X(\text{dB})=10\log_{10} X$ ) in funzione della potenza in ingresso per l'amplificatore ottico a onda viaggiante di [68].

no in buon accordo con quelli riportati in [68]; in quest'ultimo lavoro compaiono però figure di rumore minori dell'unità (non fisiche), dovute a incorrettezze nel calcolo del segnale in uscita, a cui non è stata sottratta l'emissione spontanea amplificata. Sono comunque evidenti valori della figura di rumore minori del limite quantistico degli amplificatori lineari, legati a effetti non lineari di saturazione presenti nel dispositivo. Questo risultato ha suggerito uno studio più approfondito degli amplificatori in presenza di saturazione, adottando in particolare modelli teorici più sofisticati, come si vedrà nel paragrafo 4.4.

### 4.3 Applicazione all'equazione di Van Der Pol

Come secondo esempio di applicazione del metodo di simulazione consideriamo l'oscillatore di Van Der Pol, un noto e semplice modello per il laser in prossimità della soglia [59]. L'equazione di Fokker-Planck in questo caso è bidimensionale e descrive l'evoluzione della quasi-probabilità di Glauber-Sudarshan  $P(\alpha, \alpha^*, t)$  nello schema di interazione essa è data da

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\alpha, \alpha^*, t) = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha} [(g - |\alpha|^2) \alpha] - \frac{\partial}{\partial \alpha^*} [(g - |\alpha|^2) \alpha^*] \right.$$

$$+4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \} P(\alpha, \alpha^*, t). \quad (4.22)$$

Nell'equazione (4.22) l'ampiezza complessa del campo  $\alpha$  e la variabile temporale  $t$  sono state riscalate opportunamente in modo da ottenere un solo parametro libero  $g$  ( $g$  è un parametro di pompaggio e il valore  $g = 0$  corrisponde alla condizione di soglia). La matrice di diffusione è costante e positiva: per una distribuzione iniziale definita positiva la distribuzione evoluta rimane positiva a tutti i tempi successivi. Il metodo di simulazione può dunque essere applicato per qualsiasi distribuzione iniziale positiva, come ad esempio per stati coerenti, per i quali  $P(\alpha, \alpha^*) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0)$ . Il processo diffusivo avviene in tutto il piano complesso senza alcuna limitazione.

Per poter applicare il metodo di simulazione Monte Carlo si effettua il cambiamento di variabili  $\alpha = x + iy$  e si ottiene l'equazione di Fokker-Planck

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(x, y, t) = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} x [(g - x^2 - y^2)] - \frac{\partial}{\partial y} y [(g - x^2 - y^2)] \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} P(x, y, t). \end{aligned} \quad (4.23)$$

La matrice di diffusione assume ora forma diagonale e si può quindi applicare direttamente la (4.11) in una dimensione alle variabili  $x$  e  $y$ .

In Fig. 4.3 è riportato un esempio dell'evoluzione a tre istanti successivi della distribuzione di probabilità nel piano complesso e la relativa probabilità del numero di fotoni. La figura è stata ottenuta a partire dallo stato di vuoto della radiazione ( $P(x, y, 0) = \delta(x)\delta(y)$  è equivalente alla diffusione del solo punto zero del piano complesso). Si noti come la diffusione sia isotropa nel campo complesso, come ci si aspetta dalla (4.23), invariante per rotazioni nel piano complesso. Per ricavare la distribuzione di probabilità del numero di fotoni  $p(n)$  a partire dalla funzione  $P(x, y)$ , si esprime la  $p(n)$  come trasformata di Fourier della funzione generatrice dei momenti

$$p(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{-in\lambda} \text{Tr}\{\rho e^{i\lambda \hat{n}}\}. \quad (4.24)$$

Sfruttando la relazione [4]

$$: e^{i\lambda a^\dagger a} := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(e^{i\lambda} - 1)^l}{l!} a^{\dagger l} a^l, \quad (4.25)$$

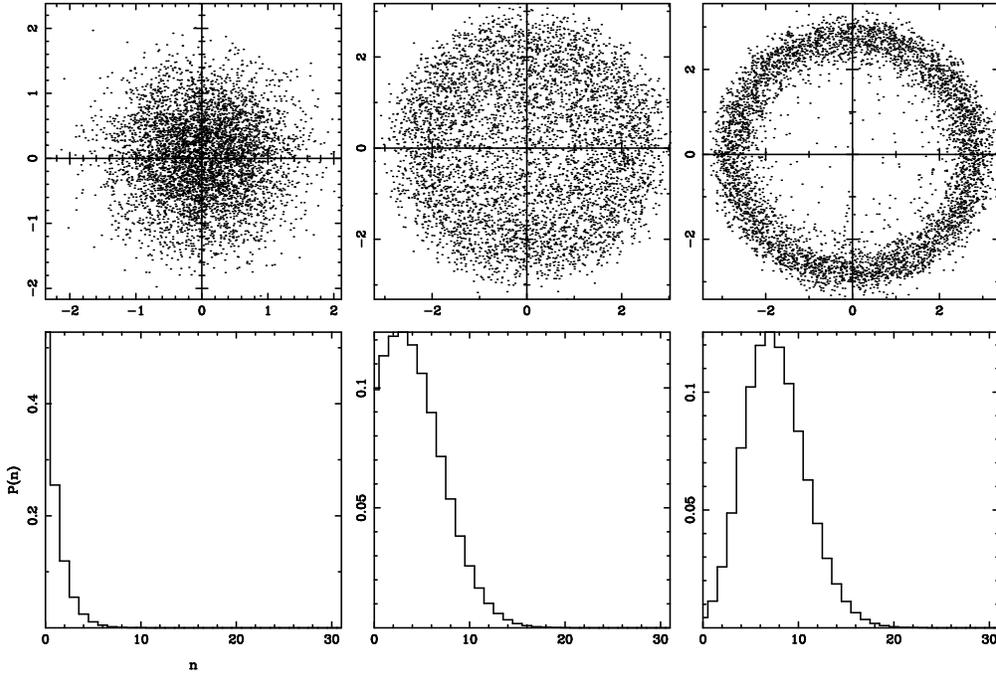


Figura 4.3: Rappresentazione della funzione  $P$  nel piano complesso e distribuzione di probabilità nel numero di fotoni per l'equazione di Van Der Pol con lo stato iniziale vuoto,  $g = 8$ , agli istanti di tempo  $t = 1/10, 1/4, 1/2$ .

dove i due punti : indicano l'ordinamento normale degli operatori, e ricordando che la funzione  $P$  è la generatrice dei prodotti normalmente ordinati del campo

$$\langle a^{\dagger m} a^n \rangle \equiv \text{Tr}\{\rho a^{\dagger m} a^n\} \equiv \int dx \int dy P(x, y) [x - iy]^m [x + iy]^n, \quad (4.26)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} p(n, t) &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-in\lambda} \int dx \int dy P(x, y, t) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(e^{i\lambda} - 1)^l}{l!} (x^2 + y^2)^l \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-in\lambda} \int dx \int dy P(x, y, t) e^{(x^2+y^2)(e^{i\lambda}-1)}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Come verifica dell'affidabilità del metodo di simulazione sono stati calcolati il numero medio di fotoni e il fattore di Fano allo stato stazionario e sono stati confrontati con le corrispondenti espressioni analitiche. Lo stato stazionario rappresenta l'unico caso in cui l'equazione di Fokker-Planck (4.22) è risolubile

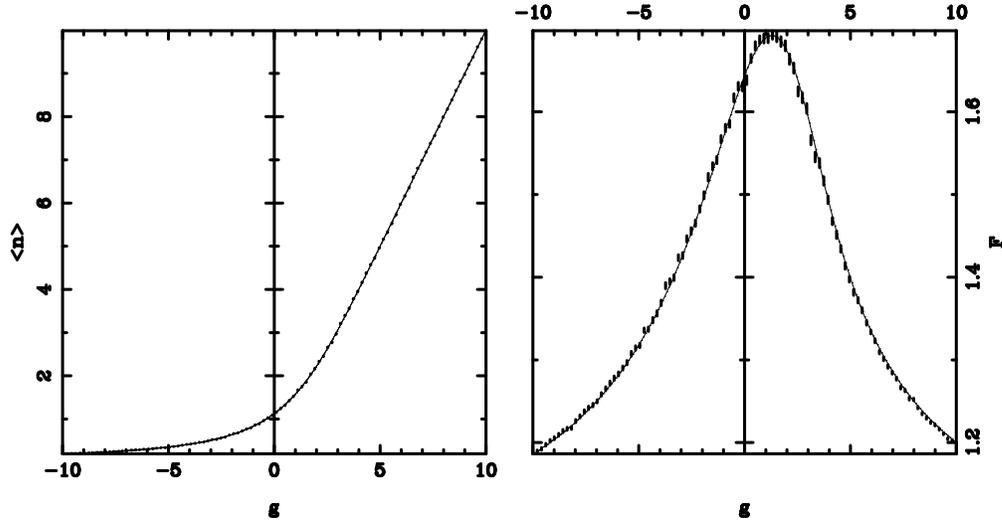


Figura 4.4: Numero medio di fotoni  $\langle \hat{n} \rangle$  e fattore di Fano  $F$  allo stato stazionario dell'oscillatore di Van Der Pol a confronto con i risultati analitici (curve continue).

analiticamente. La soluzione assume la forma [73]

$$P(\alpha, \alpha^*, t_s) = N \exp \left[ -\frac{1}{4} (|\alpha|^2 - g)^2 \right]. \quad (4.28)$$

Scrivendo  $\alpha$  in coordinate polari ( $\alpha = r e^{i\phi}$ ), la costante di normalizzazione  $N$  che compare nella (4.28) è data da

$$\begin{aligned} N &\equiv \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty r dr \exp \left[ -\frac{1}{4} (r^2 - g)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\pi^{3/2} [1 + \operatorname{erf}(g/2)]} \end{aligned} \quad (4.29)$$

dove

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (4.30)$$

Sfruttando la (4.28) si calcola facilmente il numero medio di fotoni, dato dall'espressione

$$\langle n \rangle = g + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-g^2/4)}{1 + \operatorname{erf}(g/2)}. \quad (4.31)$$

Per quanto riguarda il fattore di Fano si ha

$$F = 1 + \frac{\langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle}{\langle n \rangle} - \langle n \rangle, \quad (4.32)$$

dove

$$\langle a^\dagger a^2 \rangle = g^2 + 2 + g \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-g^2/4)}{1 + \operatorname{erf}(g/2)}. \quad (4.33)$$

Per calcolare i corrispondenti valori simulati è stata utilizzata la proprietà di ergodicità del sistema, come è stato anticipato nel paragrafo 4.1. I risultati ottenuti sono riportati in Fig. 4.4 e presentano un accordo perfetto con le curve analitiche (curve continue), in accordo con i livelli di confidenza statistici.

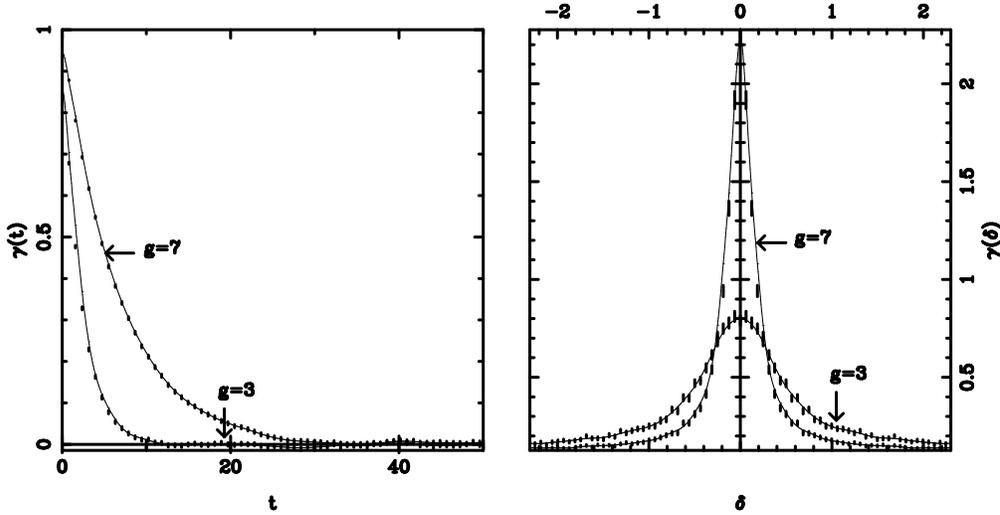


Figura 4.5: Funzioni di correlazione del campo e corrispondente spettro delle fluttuazioni per l'oscillatore di Van Der Pol con  $g = 3, 7$ . Le curve continue sono interpolazioni dei risultati della simulazione.

Sfruttando il comportamento ergodico del sistema sono stati infine valutati le funzioni di correlazione del campo dopo aver raggiunto lo stato stazionario e il corrispondente spettro delle fluttuazioni per diversi valori di  $g$ . La funzione di correlazione del campo  $\gamma(t)$  è data da

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\equiv \frac{\langle a^\dagger(t+t_s)a(t_s) \rangle}{\langle n(t_s) \rangle} \\ &= \frac{1}{\langle n(t_s) \rangle} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i(t+t_s) - iy_i(t+t_s))(x_i(t_s) + iy_i(t_s)), \end{aligned} \quad (4.34)$$

dove  $t_s$  rappresenta l'istante in cui il sistema ha raggiunto lo stato stazionario. Lo spettro delle fluttuazioni in funzione del detuning  $\delta$  rispetto alla frequenza

caratteristica della transizione è stato ottenuto attraverso la trasformata di Fourier della funzione di correlazione (4.34). I risultati ottenuti sono mostrati in Fig. 4.5.

La parte dello spettro ad alte frequenze è stata tralasciata in quanto compaiono delle oscillazioni non fisiche, dovute alle fluttuazioni statistiche a tempi brevi degli eventi simulati. In questo caso le curve continue rappresentano semplicemente un'interpolazione dei dati simulati.

## 4.4 Amplificazione al di sotto del limite quantico

In questo paragrafo viene studiato in modo dettagliato il processo di amplificazione in presenza di effetti non lineari di saturazione dovuti all'interazione della radiazione con il sistema atomico all'interno del dispositivo. In un regime di saturazione ci si aspetta che il guadagno dell'amplificatore sia inferiore al caso lineare, ma, come vedremo, gli effetti della saturazione consistono anche in una riduzione delle fluttuazioni in uscita associate all'emissione spontanea presente all'interno del sistema atomico. La coda ad alta intensità della distribuzione del numero di fotoni viene infatti tagliata dai meccanismi stessi di saturazione [24] e ciò dà luogo a basse figure di rumore, molto vicine al limite ideale e comunque largamente inferiori al limite quantico degli amplificatori lineari discusso nel capitolo 2.

Figure di rumore inferiori al limite quantico in rivelazione diretta sono state ottenute anche in [44] in uno schema che prevede la conversione elettronica del segnale ottico incidente e utilizza un amplificatore lineare di corrente elettronica. I risultati di tale lavoro però si basano sull'assunzione che l'amplificatore elettronico generi un rumore additivo indipendente dal guadagno, ed inoltre non è stata valutata correttamente l'evoluzione dello stato di vuoto nel calcolo delle figure di rumore.

Per poter descrivere in modo accurato i meccanismi di saturazione è stato adottato un approccio basato su equazioni di Fokker-Planck derivate da Lugiato, Casagrande e Pizzuto [60]. Nella rappresentazione della funzione di Wigner simmetrizzata  $W(z, z^*, t)$ , dove  $z$  rappresenta il campo complesso scalato in base al

numero di fotoni di saturazione  $N_s$  ( $z = \alpha/\sqrt{N_s}$ ), tale equazione assume la forma

$$\begin{aligned}
k^{-1} \frac{\partial W(z, z^*, t)}{\partial t} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ z \left( 1 - \sigma \frac{2\Theta}{1 + |z|^2} \right) \right] + \text{c.c.} \right. \\
& - \frac{\Theta}{2N_s} \frac{\partial^2}{\partial z^2} z^2 \frac{(1 + |z|^2)^2 + \sigma^2(1 + 2f)}{(1 + |z|^2)^3} + \text{c.c.} \\
& \left. + \frac{1}{N_s} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} \left[ 1 + \Theta \frac{(1 + |z|^2)^2(2 + |z|^2) - \sigma^2(1 + 2f)|z|^2}{(1 + |z|^2)^3} \right] \right\} W(z, z^*, t).
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Nella (4.35)  $k$  è il damping della cavità,  $\sigma$  il parametro di inversione della popolazione atomica,  $\Theta$  il parametro di cooperazione e  $f = \gamma_{\parallel}/2\gamma_{\perp}$ , dove  $\gamma_{\parallel} \equiv \gamma_{\downarrow} + \gamma_{\uparrow}$  e  $\gamma_{\perp} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_{\downarrow} + \gamma_{\uparrow} + \eta)$  sono i “rate” di decadimento atomico longitudinale e trasverso rispettivamente ( $\gamma_{\downarrow}$  e  $\gamma_{\uparrow}$  sono i “rate” di transizione tra i due livelli in risonanza con la radiazione incidente, mentre  $\eta$  rappresenta un fattore di sfasamento dovuto a collisioni elastiche tra atomi).

Le approssimazioni eseguite per derivare la (4.35) dalla master equation microscopica si basano essenzialmente sull’ipotesi  $N_s \simeq N \gg 1$  [37], dove  $N$  indica il numero effettivo di atomi coinvolti nella transizione corrispondente alla frequenza del segnale incidente (in questo modello vengono considerate soltanto transizioni in perfetta risonanza con la radiazione incidente). Inoltre è stata effettuata l’eliminazione adiabatica delle variabili atomiche, valida nel limite [40]

$$k \ll \gamma_{\downarrow}, \gamma_{\uparrow}. \tag{4.36}$$

In termini dei parametri di cooperazione e di inversione di popolazione la (4.36) può essere espressa dalla disuguaglianza

$$\Theta \gg \frac{1}{4(1 - \sigma)}. \tag{4.37}$$

È dunque necessario assicurarsi che la disuguaglianza (4.37) sia soddisfatta per poter adottare la trattazione di Fokker-Planck (4.35). Abbiamo infatti verificato che in condizioni di non validità della (4.37) si ottengono risultati non fisici, quali figure di rumore minori dell’unità.

La scelta della rappresentazione della funzione simmetrizzata  $W$  è legata al fatto che in questo caso, come si può osservare dalla (4.35), la matrice di diffusione risulta definita positiva per tutti i valori dei parametri in gioco e per tutti i valori dell’ampiezza  $z$  del campo. Data una distribuzione iniziale  $W(\alpha, \alpha^*, 0)$  definita positiva (come nel caso degli stati coerenti), l’evoluzione (4.35) garantisce

la positività della funzione di Wigner  $W(\alpha, \alpha^*, t)$  a tutti i tempi successivi e si può quindi applicare il metodo di simulazione Monte Carlo presentato nei paragrafi precedenti. L'equazione di Fokker-Planck corrispondente alla (4.35) nella rappresentazione  $P$ , derivata in modo analogo in [60], non è invece adatta ai nostri scopi, dato che in questo caso la matrice di diffusione può assumere valori negativi durante l'evoluzione.

È stata condotta un'analisi del funzionamento di amplificatori saturabili in rivelazione diretta, nell'approssimazione di segnali quasi-monocromatici. In queste condizioni l'osservabile considerata nel calcolo del guadagno e della figura di rumore è data da

$$\hat{O} = h\nu\Delta\nu a^\dagger a, \quad (4.38)$$

dove  $a^\dagger a$  rappresenta l'operatore numero del modo  $a$  corrispondente alla frequenza di picco  $\nu$  del segnale incidente, e  $\Delta\nu$  è la larghezza di banda ottica dell'amplificatore.

Ricordando che la funzione di Wigner  $W$  è generatrice dei prodotti simmetrizzati del campo, il numero medio di fotoni è dato da

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}(t) \rangle &= \frac{1}{2} \langle a^\dagger a + a a^\dagger \rangle - \frac{1}{2} \\ &= \int d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*, t) |\alpha|^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Le fluttuazioni corrispondenti si ricavano in modo analogo a partire dai prodotti ordinati simmetricamente e vengono calcolate nel modo seguente

$$\langle \Delta \hat{n}^2(t) \rangle = \int d^2\alpha W(\alpha, \alpha^*, t) (|\alpha|^4 - |\alpha|^2) - \langle \hat{n}(t) \rangle^2. \quad (4.40)$$

È stato analizzato il caso reale di amplificatore laser a onda viaggiante citato in [68], costituito essenzialmente da un laser a semiconduttore. A differenza del paragrafo 4.2, in cui è stato adottato lo stesso modello del lavoro [68] per controllare la validità del metodo di simulazione sviluppato, il dispositivo viene qui descritto in modo molto più realistico dall'equazione di Fokker-Planck (4.35), che tiene conto in modo più accurato dei meccanismi di saturazione presenti all'interno del dispositivo. I parametri di funzionamento di questo dispositivo sono riportati nella tabella 4.1.

Il legame tra i parametri caratteristici di [68] e quelli che compaiono nella (4.35) è stato ricavato riducendo entrambi i modelli a un regime di funzionamento lineare,

Coefficiente di emissione stimolata	$A$	$1.17 \times 10^{12} \text{s}^{-1}$
Coefficiente di assorbimento	$B$	$3.375 \times 10^{11} \text{s}^{-1}$
Costante di damping della cavità	$k$	$1.875 \times 10^{11} \text{s}^{-1}$
Velocità della luce nel mezzo	$v$	$7.5 \times 10^7 \text{ms}^{-1}$
Lunghezza della cavità	$l_*$	$1.2 \times 10^3 \mu \text{m}$
Frequenza di picco	$\nu$	$1.96 \times 10^{14} \text{s}^{-1}$
Larghezza di banda ottica	$\Delta\nu$	$1.263 \times 10^{13} \text{s}^{-1}$
Parametro di cooperazione	$\Theta$	2.01
Numero di fotoni di saturazione	$N_s$	$1.115 \times 10^4$
Inversione di popolazione	$\sigma$	0.5522
Rapporto rate di decadimento parallelo/trasverso	$f$	1
Fotoni per potenza incidente	$(h\nu\Delta\nu)^{-1}$	$6.1 \times 10^5 \text{W}^{-1}$

Tabella 4.1: Parametri caratteristici dell'amplificatore saturabile del lavoro [68].

nell'approssimazione  $z, z^* \ll 1$  (che equivale alla condizione  $\nu \ll 1$  nel paragrafo 4.2).

La simulazione numerica della (4.35) è stata effettuata attraverso la diagonalizzazione della matrice di diffusione, come accennato nel paragrafo 4.1. I segnali in ingresso considerati sono rappresentati da stati coerenti  $|\alpha_0\rangle$ , per i quali la distribuzione di probabilità iniziale assume la forma

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{8\pi} \exp \left[ -2(\alpha - \alpha_0)^2 \right]. \quad (4.41)$$

Le figure riportate in questo paragrafo sono state ottenute con 20 campioni statistici di 1000 eventi ciascuno nella simulazione Monte Carlo, mentre l'evoluzione della componente di emissione spontanea è stata studiata preliminarmente in modo molto accurato, utilizzando 200 campioni statistici in modo da avere un segnale di vuoto molto stabile.

Nella figura 4.6 è riportato l'andamento del guadagno in funzione della lunghezza del dispositivo per tre diversi valori del segnale in ingresso. Come si può osservare, si evidenziano tre regimi di funzionamento distinti e qualitativamente molto diversi l'uno dall'altro:

*i)* Regime *lineare* per segnali deboli in ingresso e tali che l'intensità del campo

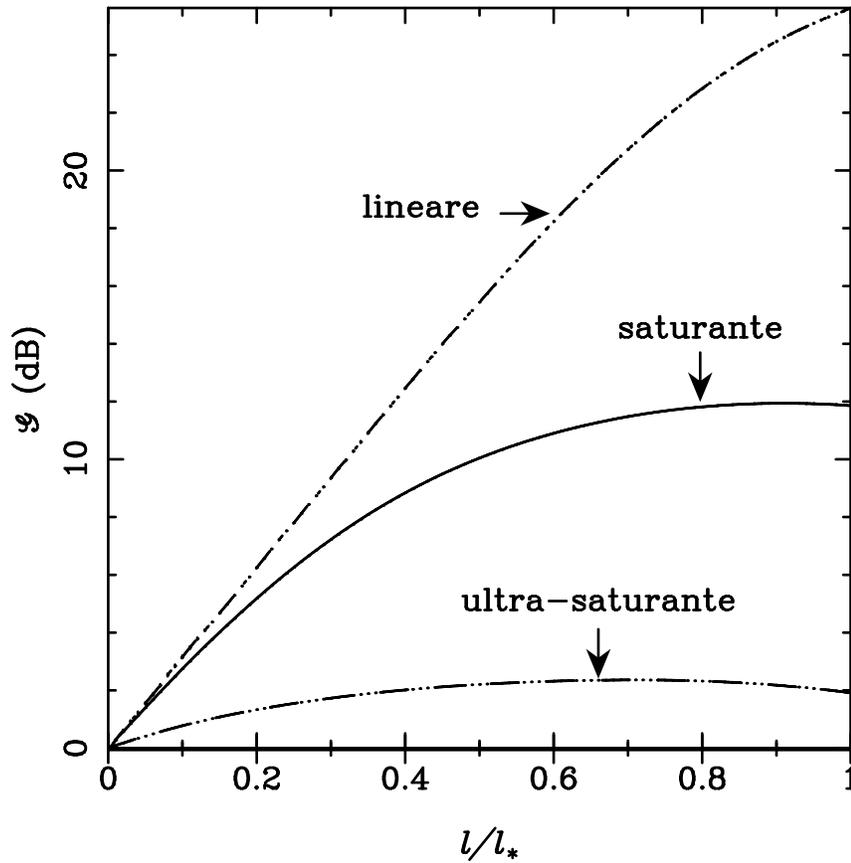


Figura 4.6: Guadagno in funzione della lunghezza dell'amplificatore per l'amplificatore saturabile di tabella 4.1 per i seguenti valori del segnale incidente  $\mathcal{S}_{in} = -20, 0.16, 10.72$  dBm [ $\mathcal{S}(\text{dBm}) = 10 \log_{10}(10^3 \mathcal{S})$ ]: il numero medio di fotoni corrispondente è dato da  $\langle n \rangle = \mathcal{S}/(h\nu\Delta\nu)$ .

si mantiene molto minore del numero di fotoni di saturazione per tutta l'evoluzione considerata (cioè  $z \ll 1$  per  $l \leq l_*$ ).

- ii) Regime *saturante* per segnali di intensità minore del numero di fotoni di saturazione all'uscita dell'amplificatore ( $z < 1$  per  $l \sim l_*$ ).
- iii) Regime *ultra-saturante* per segnali che all'uscita dell'amplificatore hanno intensità confrontabile con il numero di fotoni di saturazione ( $z \sim 1$  per  $l \sim l_*$ ).

Nel regime lineare il guadagno aumenta esponenzialmente in funzione della lun-

ghezza del dispositivo durante l'intera evoluzione considerata. Nel regime saturante invece il guadagno comincia a risentire degli effetti di saturazione circa a metà della lunghezza dell'amplificatore e si mantiene poi al di sotto del corrispondente valore in regime lineare. Nel regime ultra-saturante infine il guadagno è praticamente saturato fin dall'inizio, raggiunge un massimo molto debole e poi decresce.

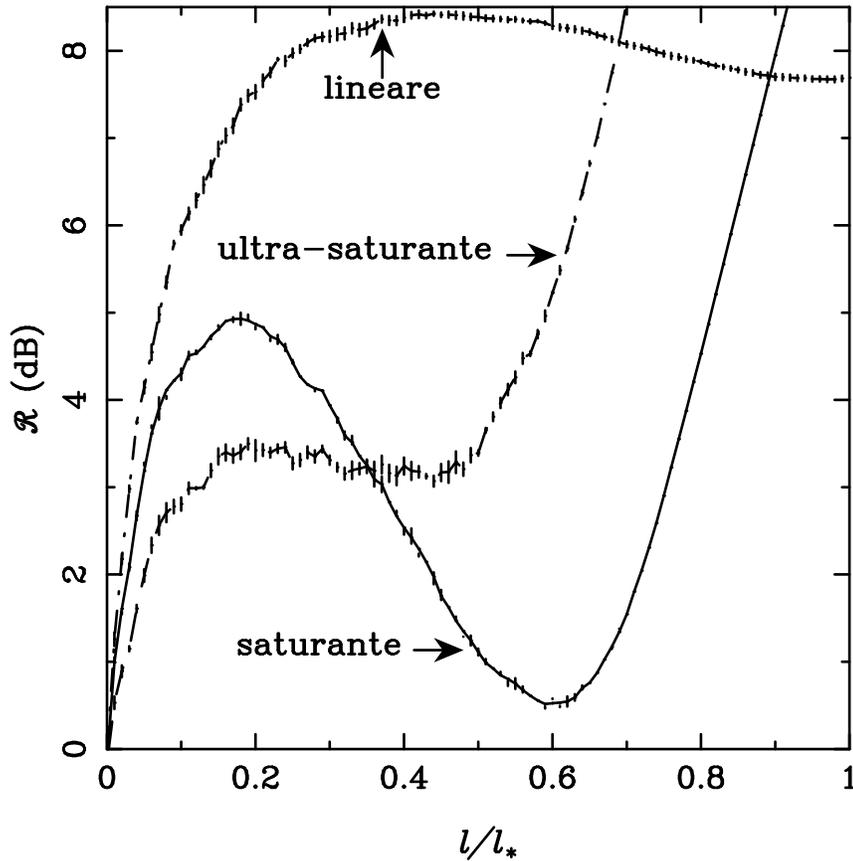


Figura 4.7: Figura di rumore in funzione della lunghezza dell'amplificatore per gli stessi parametri di funzionamento di Fig. 4.6.

È stata poi studiata la figura di rumore relativa ai segnali considerati nella figura 4.6. Gli andamenti sono riportati in figura 4.7. Nel regime lineare la figura di rumore aumenta linearmente in corrispondenza dei primi istanti dell'evoluzione, poi tende a un valore asintotico pari a diversi decibel. Nel regime saturante invece gli effetti di saturazione sono determinanti: la figura di rumore non è più una funzione monotona crescente della lunghezza dell'amplificatore, ma presenta un minimo

molto profondo inferiore al limite quantico di 3dB. Nel regime ultra-saturante infine la figura di rumore mostra un'ampia zona di "plateau" corrispondente circa a 3dB prima che il guadagno abbia raggiunto la saturazione completa, oltre la quale diventa una funzione crescente fino a  $l_*$ .

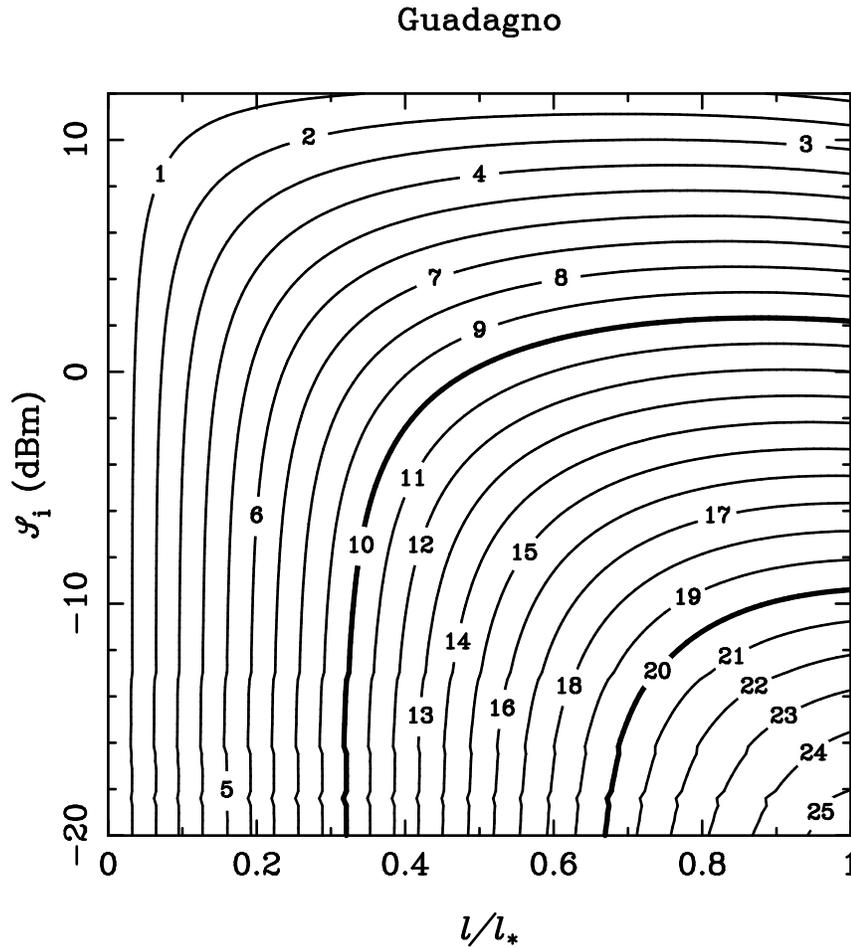


Figura 4.8: Curve di livello (in dB) per il guadagno in funzione della lunghezza dell'amplificatore e del segnale in ingresso.

Nelle figure 4.8 e 4.9 vengono riportate le curve di livello degli andamenti del guadagno e della figura di rumore in funzione della lunghezza dell'amplificatore e del segnale in entrata. Come si può osservare, si delinea una vasta zona in cui la figura di rumore risulta nettamente inferiore al limite quantico standard di 3dB, in corrispondenza a valori discretamente elevati del guadagno. Il minimo assoluto

corrisponde al valore

$$\mathcal{R}_{min} = 1.125 \text{ (0.51dB)} , \quad (4.42)$$

con guadagno  $\mathcal{G} = 10.8 \text{ dB}$  e lunghezza di amplificazione  $l = 0.6l_*$ . Il numero medio di fotoni del segnale in uscita è dato approssimativamente da

$$\mathcal{S}_{out} \simeq 0.7N_s h\nu \Delta\nu . \quad (4.43)$$

**Figura di rumore**

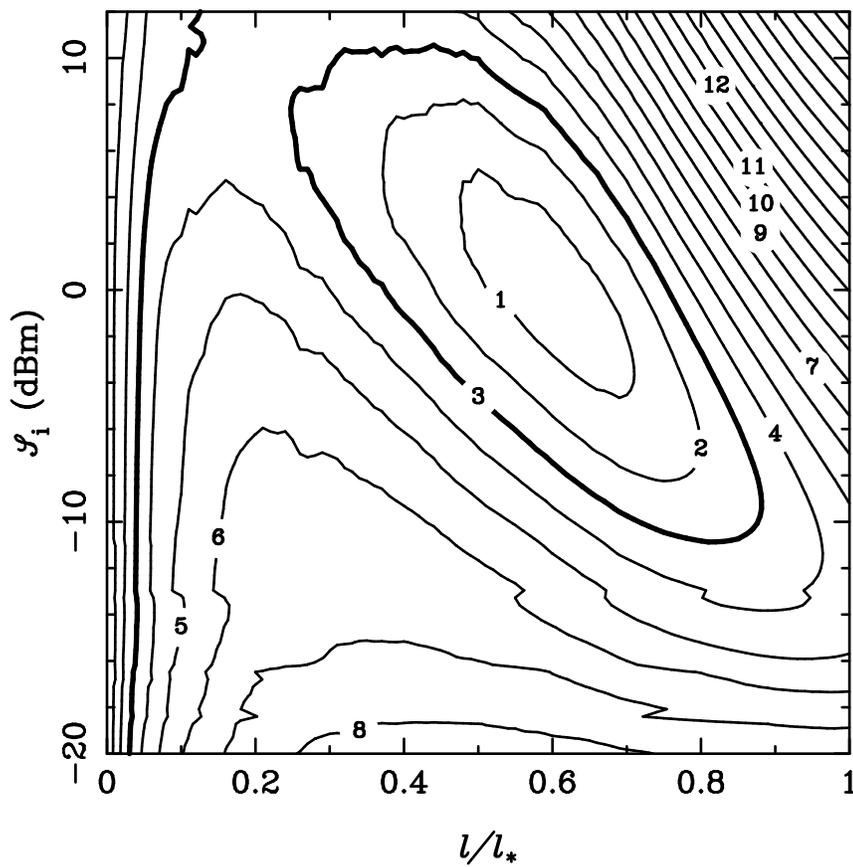


Figura 4.9: Curve di livello (in dB) per la figura di rumore in funzione della lunghezza dell'amplificatore e del segnale in ingresso.

Come abbiamo visto, gli effetti di saturazione sono determinanti per superare il limite quantico degli amplificatori lineari. I meccanismi di saturazione infatti

portano a una riduzione del rumore in uscita legato all'amplificazione dell'emissione spontanea in quanto tagliano la coda ad alta intensità nella distribuzione di probabilità del numero di fotoni. Le prestazioni ottimali si ottengono individuando in funzione della lunghezza di amplificazione e del segnale in ingresso un regime di funzionamento intermedio, che abbiamo chiamato *saturante*, in cui gli effetti non lineari di saturazione non limitino troppo il guadagno, ma allo stesso tempo riducano sensibilmente le fluttuazioni. Nel caso particolare considerato ciò corrisponde a segnali in uscita di intensità pari a circa  $0.7N_s$ . Questi criteri di carattere qualitativo per individuare le condizioni di miglior funzionamento dell'amplificatore hanno validità generale e non si limitano ai valori particolari dei parametri considerati in questo paragrafo.

Uno studio numerico estensivo al variare di  $N_s$ ,  $\Theta$  e  $\sigma$  ha mostrato che l'equazione (4.35) è molto affidabile nel descrivere gli effetti quantistici di saturazione; per valori elevati del numero di fotoni di saturazione e valori dei parametri  $\Theta$  e  $\sigma$  entro il dominio di validità (4.37) si ottengono sempre risultati che hanno significato fisico, con figure di rumore al di sopra del limite ideale di Heisenberg.

Si noti che un amplificatore di questo genere, basato sui meccanismi di saturazione della popolazione atomica che prende parte alla transizione, rappresenta finora il miglior tipo di amplificatore in rivelazione diretta realizzabile nella pratica. Rispetto all'amplificatore phase insensitive lineare descritto nel paragrafo 2.4 infatti esso permette di superare ampiamente il limite quantistico alla figura di rumore in rivelazione diretta. Inoltre, essendo anch'esso di tipo phase insensitive (la (4.35) è infatti invariante per rotazioni nel piano complesso), è più facilmente utilizzabile di un amplificatore phase sensitive, in quanto non richiede la conoscenza della fase dello stato coerente in ingresso.

Anche se i valori dei parametri di tabella 4.1 sono stati suggeriti dall'amplificatore di [68], nel modello di Lugiato, Casagrande e Pizzuto considerato in questo paragrafo essi non corrispondono a un laser a semiconduttore [62]. La corrispondenza tra i parametri di [68] e il parametro di cooperazione del presente modello richiede la conoscenza dei valori dei rate di transizione  $\gamma_\downarrow$  e  $\gamma_\uparrow$ ; tali valori sono stati ricavati nell'ipotesi che il numero di atomi coinvolti nella transizione  $N$  sia dello stesso ordine di grandezza del numero di fotoni di saturazione  $N_s$  (condizione richiesta per la validità del modello) e che il decadimento sia puramente radiativo ( $f = 1$ ). Entrambe queste ipotesi non sono in realtà soddisfatte pienamente nel caso di un dispositivo a semiconduttore. Ciò non invalida comunque i risultati mostrati nelle figure di questo lavoro, che sono state ottenute nell'am-

bito dei limiti di validità del modello considerato. Il modello si applica in modo più appropriato al caso di laser a gas, in cui tipicamente la condizione (4.36) è ampiamente soddisfatta. Sono stati fatti alcuni tentativi in questa direzione, in modo da avere risultati direttamente applicabili a dispositivi reali, ma nel caso dei laser a gas sia il numero di fotoni di saturazione sia il parametro cooperativo assumono in genere valori molto più grandi di quelli riportati nella tabella 4.1 e ciò comporta problemi di precisione a livello numerico. Quest'ultimo caso è ancora in fase di svolgimento.

# Capitolo 5

## Informazione quantistica in canali di comunicazione lineari

In questo capitolo vengono analizzati gli effetti dell'inserimento di un amplificatore lineare in un canale di comunicazione quantistico non ideale, in presenza cioè di perdite lungo la linea di trasmissione e inefficienze allo stadio di rivelazione. Dopo aver introdotto i concetti che stanno alla base della teoria quantistica dell'informazione, si dà una caratterizzazione completa di un canale di comunicazione quantistico, analizzando i vari stadi che lo compongono, dalla sorgente allo stadio di rivelazione. Vengono analizzati in modo dettagliato i canali di trasmissione monomodali “squeezed” con rivelazione omodina e quelli coerenti con rivelazione eterodina. I rivelatori eterodina ed omodina non ideali vengono descritti in termini di misure a valori di operatori di probabilità (POM) per la funzione di Wigner e per la distribuzione marginale di Wigner rispettivamente [26, 28], mentre l'evoluzione quantistica dei segnali lungo la linea di comunicazione è analizzata a partire da “mappe completamente positive”. I processi di amplificazione e attenuazione lineari vengono descritti in modo più generale rispetto al capitolo 2 in termini di master equation e di equazioni di Fokker-Planck.

Vengono generalizzati i concetti di guadagno e figura di rumore al caso di alfabeto di dimensione arbitraria e di rivelazione non efficiente. Viene introdotta inoltre la definizione di rumore per rivelazione di osservabili complesse e viene applicata al caso di rivelazione eterodina. Si dimostra in particolare che l'inserimento di un amplificatore opportuno in presenza di rivelatori non ideali può portare a figure di rumore minori dell'unità. Si mostra inoltre come l'inserimento di un amplificatore lineare aumenti l'informazione trasmessa sul canale soltanto nel

caso in cui il canale stesso non sia ideale e il tipo di amplificatore venga scelto opportunamente in funzione della codifica del canale e del tipo di rivelazione effettuato allo stadio finale [25].

In conclusione del capitolo si accenna alla possibilità di realizzare processi di amplificazione mediante meccanismi di feedback.

## 5.1 Canali di comunicazione quantistici

In questo paragrafo vengono introdotti alcuni concetti preliminari necessari per una trattazione totalmente quantistica della trasmissione di informazione tra la sorgente e un utente in un canale di comunicazione. Un canale di comunicazione quantistico è mostrato schematicamente in Fig. 5.1.

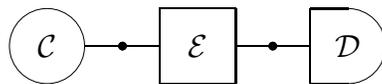


Figura 5.1: Schema di un canale di comunicazione quantistico.

La sorgente consiste in un codificatore che opera una corrispondenza tra le lettere  $\theta$  appartenenti a un alfabeto  $\Theta$  (nel quale viene codificato il messaggio prima della trasmissione) e un insieme di operatori densità  $\rho_\theta$  nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  del sistema dinamico che fa da supporto alla comunicazione. L'alfabeto  $\Theta$  può essere in generale un insieme discreto, un sottoinsieme di  $R^d$  o un insieme misto (discreto-continuo). Le lettere dell'alfabeto  $\theta$  sono distribuite secondo una distribuzione di probabilità *a priori*  $dP(\theta)$ , la quale definisce anche la “miscela” degli stati  $\rho_\theta$  nel modo seguente

$$\bar{\rho} \equiv \int dP(\theta) \rho_\theta . \quad (5.1)$$

L'insieme  $\Theta$ , la mappa  $\rho_\theta$  e la distribuzione di probabilità  $dP(\theta)$  costituiscono la “codifica” del canale, indicata con  $\mathcal{C} = \{dP(\theta), \rho_\theta, \theta \in \Theta\}$ . Esempi tipici di codifica su un canale di trasmissione monomodale sono:

- i)* codifica numero  $\mathcal{C}_n$ , basata sulla trasmissione di stati numero  $|n\rangle\langle n|$  del modo della radiazione considerato;

ii) codifica quadratura/stati “squeezed”  $\mathcal{C}_x$ , in cui gli stati parametrizzati  $\rho_\lambda$  ( $\lambda \in R$ ) sono stati “squeezed” corrispondenti alla quadratura  $X = \frac{1}{2}(a + a^\dagger)$  con valor medio  $\langle X \rangle = \lambda$ ;

iii) codifica coerente  $\mathcal{C}_\alpha$ , che utilizza stati coerenti  $\rho_\alpha = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ ,  $\alpha \in C$ .

Qualsiasi dispositivo inserito nella linea di comunicazione produce un’evoluzione alla Schrödinger  $\rho \rightarrow E_S(\rho)$  della matrice densità  $\rho$  che trasporta l’informazione. Il sistema “codificatore-dispositivo” è dunque equivalente a un nuovo codificatore che dà luogo alla codifica  $\mathcal{C} \circ \mathcal{E} = \{dP(\theta), E_S(\rho_\theta), \theta \in \Theta\}$ , dove  $\mathcal{E} \equiv \{\rho \rightarrow E_S(\rho)\}$  indica la mappa che descrive il dispositivo considerato.

Allo stadio finale della linea di comunicazione l’utente determina l’identità della lettera trasmessa  $\theta$  come il risultato di una misura quantistica eseguita sul sistema. Tale misura è descritta in modo generale attraverso una misura a valore di operatore di probabilità [43, 81, 67] (POM)  $d\mu(\zeta)$  in  $\mathcal{H}$  per i risultati  $\zeta \in R^d$ . Una POM è una risoluzione dell’identità, ovvero

$$\int d\mu(\zeta) = 1 \quad (5.2)$$

e soddisfa la condizione di positività

$$d\mu(\zeta) \geq 0. \quad (5.3)$$

Essa rappresenta una generalizzazione delle usuali misure a valori di proiettori ortogonali associate alle osservabili quantistiche convenzionali. Quando la misura viene effettuata sullo stato  $\rho$  del sistema la distribuzione di probabilità risultante è data da

$$dP[\rho](\zeta) \equiv \text{Tr}[\rho d\mu(\zeta)]. \quad (5.4)$$

Ciascun apparato di rivelazione è descritto da una POM; la POM infatti deriva in generale da una misura a valori di proiettori ortogonali comprendente anche i gradi di libertà dell’apparato di misura stesso, che alla fine vengono “tracciati” per determinare le distribuzioni di probabilità relative al solo sistema.

Nel seguito lo stadio di rivelazione verrà indicato con  $\mathcal{D} = \{d\mu(\zeta), \zeta \in R^d\}$ . Verranno presi in considerazione due tipi di rivelazione: rivelazione omodina  $\mathcal{D}_x = \{d\mu(x), x \in R\}$  e rivelazione eterodina  $\mathcal{D}_\alpha = \{d^2\mu(\alpha, \bar{\alpha}), \alpha \in C\}$ . Le POM corrispondenti vengono descritte nel paragrafo 5.2.

Se il rivelatore è preceduto da un dispositivo descritto dall'evoluzione di Heisenberg  $d\mu \rightarrow E_H(d\mu)$ , il complesso “dispositivo+rivelatore” è equivalente a un nuovo rivelatore caratterizzato dalla POM  $\mathcal{E} \circ \mathcal{D} = \{E_H(d\mu(\zeta)), \zeta \in R^d\}$ . A seconda che si consideri lo schema di Schrödinger o di Heisenberg si può quindi enucleare l'introduzione di un dispositivo lungo la linea nello stadio di codifica o in quello di rivelazione rispettivamente. Ad esempio l'effetto dell'inserimento di un amplificatore nel canale di comunicazione, descritto dall'operatore di evoluzione  $\mathcal{A}$  può essere equivalentemente trattato in termini di codifica post-amplificata ( $\mathcal{C} \circ \mathcal{A}$ ) o pre-amplificazione allo stadio di rivelazione ( $\mathcal{A} \circ \mathcal{D}$ ).

La probabilità condizionata che il risultato della misura fornisca la lettera  $\zeta$  in corrispondenza della trasmissione della lettera  $\theta$  è espressa dall'equazione (5.4) con  $\rho \equiv E_S(\rho_\theta)$  o equivalentemente con  $d\mu \equiv E_H(d\mu')$ .

L'informazione trasmessa lungo il canale è quantificata dalla “mutua informazione” [10, 88]

$$I[\mathcal{C} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{D}] = \int dP(\theta) \int dP[\rho_\theta](\zeta) \log \frac{dP[\rho_\theta]}{dP[\bar{\rho}]}(\zeta), \quad (5.5)$$

dove  $dP[\rho_\theta]/dP[\bar{\rho}]$  indica la derivata di Radon-Nikodym di  $P[\rho_\theta]$  rispetto a  $P[\bar{\rho}]$ . Il valore massimo della mutua informazione al variare della probabilità a priori  $dP(\theta)$  (con  $\mathcal{E}$ : identità) è detto “capacità”  $C$  del canale

$$C = \max_{dP(\theta)} I[\mathcal{C} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{D}]. \quad (5.6)$$

Tale valore massimo viene valutato tenendo conto di limitazioni di natura fisica imposte dal canale che trasporta l'informazione: può essere fissata ad esempio la potenza massima dei segnali trasmessi sul canale oppure la potenza media della miscela di stati *a priori* (5.1). Nel seguito verrà considerato il vincolo sulla potenza media tollerata dalla linea di comunicazione. Il valore massimo globale della mutua informazione, che si ottiene variando anche il tipo di codifica impiegato e il tipo di rivelazione allo stadio finale, è detto “capacità quantistica ottima” del canale

$$C_o = \max_{dP(\theta), \bar{\rho}_\theta, d\hat{\mu}(x)} I[\mathcal{C} \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{D}]. \quad (5.7)$$

È stato dimostrato [88, 45] che la capacità quantistica ottima corrisponde alla codifica numero  $\mathcal{C}_n$  e rivelazione diretta  $\mathcal{D}_n$ , con  $\bar{\rho}$  rappresentato dallo stato termico con un numero medio di fotoni  $\bar{n}$  corrispondente alla potenza media tollerata

lungo la linea. Essa è data dalla seguente espressione

$$C[\mathcal{C}_n \circ \mathcal{D}_n] = \log(1 + \bar{n}) + \bar{n} \log(1 + 1/\bar{n}) . \quad (5.8)$$

Dato che allo stato attuale della ricerca scientifica non è ancora stato realizzato un metodo per produrre stati numero della radiazione (sono stati prodotti sperimentalmente stati numero soltanto all'interno di cavità), un canale di questo tipo purtroppo non è ancora disponibile. Il motivo per cui la capacità ottima corrisponde al canale numero è legato al fatto che l'informazione viene codificata su un insieme di stati ortogonali e misurando l'osservabile diagonale su questi stati (il numero di fotoni), in assenza di inefficienze di alcun tipo, si può ricostruire l'informazione originale senza ambiguità. Ciò non succede nei casi di canale coerente e squeezed, perchè la codifica è effettuata su stati non ortogonali e da una singola misurazione non è quindi possibile determinare con esattezza lo stato trasmesso nemmeno idealmente.

Nel caso di canale "squeezed" con rivelazione omodina la capacità è data dalla seguente espressione

$$C[\mathcal{C}_x \circ \mathcal{D}_x] = \log(1 + 2\bar{n}) , \quad (5.9)$$

ottenuta mediante stati "squeezed"  $|\lambda; r\rangle$  con parametro di "squeezing"  $e^{2r} = 1 + 2\bar{n}$  e con una probabilità *a priori*  $dP(\lambda)$  che è sovrapposizione di Gaussiane a media nulla e varianza  $\sigma^2 = \bar{n} - \sinh^2 r$ ; tale probabilità assume la forma

$$p(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right) . \quad (5.10)$$

La capacità di un canale coerente è data da

$$C[\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{D}_\alpha] = \log(1 + \bar{n}) , \quad (5.11)$$

dove la probabilità  $dP(\alpha, \bar{\alpha})$  è di nuovo Gaussiane e corrisponde allo stato termico con numero medio di fotoni  $\bar{n}$

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{(1 + \bar{n})} e^{-\frac{|\alpha|^2}{(1 + \bar{n})}} . \quad (5.12)$$

Le capacità di questi tre tipi di canale sono mostrate in Fig. 5.2.

Un canale è ottimizzato (raggiunge cioè la capacità prevista teoricamente) quando la trasmissione dei segnali lungo la linea e l'apparato di rivelazione sono ideali, senza cioè perdite di linea o inefficienze nei fotocontatori. Inoltre la codifica e la

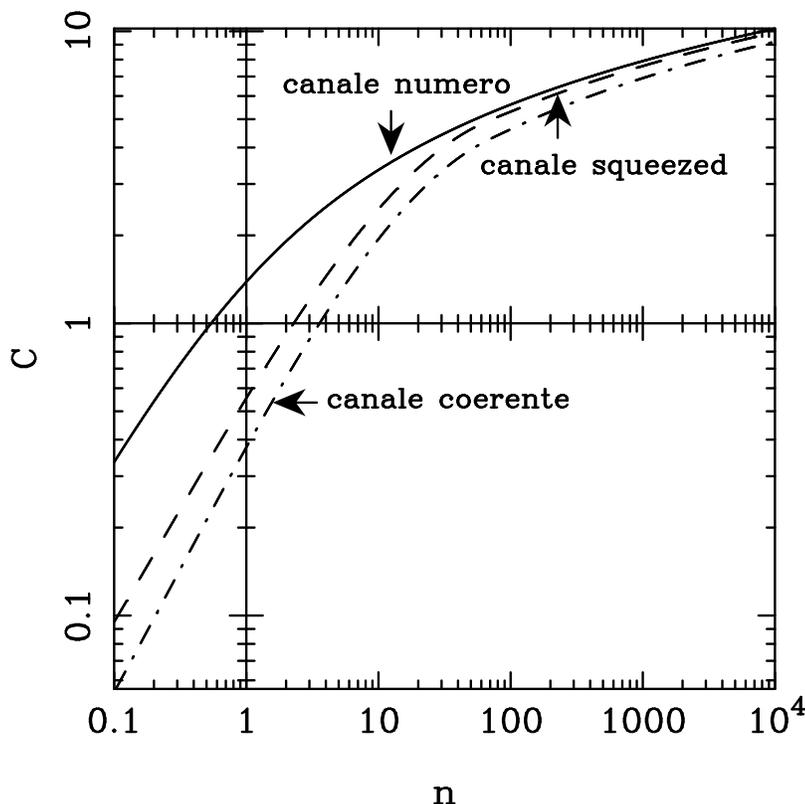


Figura 5.2: Capacità dei canali numero, squeezed e coerente in funzione del numero medio di fotoni tollerati dalla linea di trasmissione.

rivelazione devono essere anch'esse ottimizzate, nel senso che gli stati quantistici trasmessi devono essere autostati dell'osservabile che si intende misurare: stati numero per rivelazione diretta, stati coerenti per rivelazione eterodina, mentre per rivelazione omodina gli stati ottimali sono opportuni stati "squeezed" (gli autostati della quadratura, avendo energia infinita, non corrispondono a stati fisici). Dato che la probabilità *a priori* dell'alfabeto viene ottimizzata in modo da garantire un limite alla potenza media lungo la linea di trasmissione e in condizioni ideali il canale quindi funziona già al limite della sua capacità, non c'è alcun bisogno di amplificare i segnali trasmessi. Questo comunque rappresenta un caso ideale.

Nel caso di canali non ideali, a causa di una corrispondenza imperfetta tra codifica e sistema di rivelazione, di perdite di linea o di valori non unitari dell'efficienza quantica del rivelatore (questi due ultimi casi sono inevitabili nelle applicazioni

pratiche), un'amplificazione appropriata dei segnali può migliorare l'informazione trasmessa e portarla al valore della capacità di canale nel limite di guadagni infiniti, come vedremo nel paragrafo 5.4. Nel seguito analizzeremo soltanto canali squeezed e coerenti.

## 5.2 Rivelazione non efficiente

Come è stato accennato nel paragrafo 2.3, un fotocontatore con efficienza quantica  $\eta$  può essere schematizzato con un rivelatore ideale preceduto da un beam splitter con trasmissività  $\eta$ . Sfruttando questo risultato si possono facilmente calcolare le POM di apparati di rivelazione omodina e eterodina (descritti nei paragrafi A.3 e A.4) con fotocontatori non ideali [51, 26, 28].

Per un rivelatore omodina con un oscillatore locale molto intenso e con due fotocontatori con la stessa efficienza quantica  $\eta$  la POM è una semplice convoluzione gaussiana

$$d\mu_\eta(x) = \int \frac{dx'}{\sqrt{\pi(1-\eta)/2\eta}} \exp\left[-\frac{2\eta}{1-\eta}(x-x')^2\right] |x'\rangle\langle x'|, \quad (5.13)$$

dove  $|x\rangle$  sono gli autostati della quadratura  $a_\phi$  alla fase  $\phi$  rispetto all'oscillatore locale. Per  $\eta = 1$  si ritrova la misura a valori di proiettori ortogonali  $d\mu(x) = dx|x\rangle\langle x|$  del rivelatore omodina ideale.

Per un rivelatore eterodina non ideale, supponendo che l'efficienza quantica  $\eta$  sia indipendente dalla frequenza nella banda che comprende la frequenza del segnale incidente e la frequenza del modo immagine, la POM è ancora una convoluzione Gaussiana della POM ideale  $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ , cioè

$$d^2\mu_\eta(\alpha, \alpha^*) = \frac{d^2\alpha}{\pi} \int \frac{d^2\alpha'}{\pi(1-\eta)/\eta} \exp\left[-\frac{\eta}{1-\eta}|\alpha-\alpha'|^2\right] |\alpha'\rangle\langle\alpha'|. \quad (5.14)$$

Come si osserva dalle equazioni (5.13) e (5.14) e come apparirà più chiaro nel seguito dall'espressione della distribuzione di probabilità corrispondente, l'effetto di inefficienze ai fotocontatori è quello di fornire una distribuzione di probabilità per l'osservabile rivelata più allargata, e quindi più "rumorosa" rispetto al caso di rivelatori ideali.

Le POM (5.13) e (5.14) possono essere scritte in modo più conveniente in termini

di POM di funzioni di Wigner espresse dalla relazione

$$W_s(\alpha, \alpha^*) \equiv \text{Tr} \left\{ \frac{d^2 w_s(\alpha, \alpha^*)}{d^2 \alpha} \right\}, \quad (5.15)$$

con

$$d^2 w_s(\alpha, \alpha^*) \equiv \frac{d^2 \alpha}{\pi} \int \frac{d^2 \beta}{\pi} e^{\alpha \bar{\beta} - \bar{\alpha} \beta + \frac{1}{2} s |\beta|^2} D(\beta), \quad (5.16)$$

dove  $D(\beta)$  rappresenta l'operatore di spostamento definito nel paragrafo A.1. La distribuzione di probabilità associata alla POM (5.16) è la funzione di Wigner corrispondente al parametro di ordinamento  $s$  ed è definita positiva per  $s \leq -1$ . Confrontando le equazioni (5.14) e (5.16) si dimostra facilmente che

$$d^2 \mu_\eta(\alpha, \bar{\alpha}) = d^2 w_{1-2\eta^{-1}}(\alpha, \bar{\alpha}). \quad (5.17)$$

La corrispondenza (5.17) è ben definita, dato che  $1 - 2\eta^{-1} \leq 1$  per  $\eta < 1$ .

Introducendo il cambiamento di variabili  $\alpha = x + iy$ , la POM omodina può essere scritta come POM marginale (integrata cioè in una dimensione) di  $d^2 w_s$ , ovvero

$$d\mu_s(x) = \int \frac{dy}{\pi} \frac{d^2 w_s(x, y)}{dx dy}, \quad (5.18)$$

con  $s = 1 - \eta^{-1}$ . Si noti che, anche se la funzione di Wigner è definita positiva solo per  $s \leq -1$ , la funzione marginale corrispondente è definita positiva per  $s \leq 0$  e ciò rende valida la corrispondenza (5.18) per qualsiasi  $\eta \leq 1$ . La (5.18) fornisce dunque la POM per la quadratura  $X$  a  $\phi = 0$ . La POM relativa a una generica quadratura  $a_\phi$  si ricava in modo analogo integrando marginalmente nel piano complesso lungo la direzione corrispondente alla quadratura coniugata.

### 5.3 Equazioni di evoluzione per un sistema lineare aperto

In questo paragrafo vengono brevemente introdotte le equazioni di evoluzione per il segnale lungo la linea di trasmissione in presenza di dispositivi lineari generici, attivi (amplificatori) e passivi (perdite), trattati in generale come sistemi aperti [31]. Un amplificatore ad esempio può essere pensato come un sistema aperto, in cui il modo amplificato (di segnale) della radiazione interagisce con altri modi (amplificatore parametrico) oppure con gradi di libertà “di materia”

(amplificatore a mezzo attivo). I modi di pompa forniscono l'energia necessaria all'amplificazione, mentre modi idler garantiscono le condizioni di risonanza. Anche il beam splitter e il generico attenuatore sono sistemi aperti, in cui il modo di segnale viene gradatamente disperso in modi esterni.

L'evoluzione dinamica della matrice densità  $\rho$  di un sistema aperto si ottiene tracciando parzialmente sui gradi di libertà di tutti i modi esterni (di pompa o idler) ed è descritta da una mappa della forma

$$\rho_t = E_S(\rho) \equiv \text{Tr}_P \left[ U_t \rho_P \otimes \rho U_t^\dagger \right] , \quad (5.19)$$

dove  $U_t$  è un operatore unitario e  $\rho_P$  è la matrice densità per il “probe” (idler+pompa appunto).

La (5.19) si riferisce allo schema di Schrödinger. In schema di Heisenberg l'equazione corrispondente alla (5.19) dà luogo all'evoluzione per la POM, definita attraverso il duale  $E_H = E_S^\vee$  dalla traccia (5.4). La mappa di Heisenberg  $E_H$  è una mappa che conserva la normalizzazione e trasforma POM in POM (questo tipo di mappa è detta mappa “completamente positiva”, in quanto conserva la positività dell'operatore su cui agisce). La mappa di Schrödinger invece descrive l'evoluzione della matrice densità, conservandone la positività, la traccia e le combinazioni lineari convesse.

In termini dell'operatore unitario  $U_t$  la mappa  $E_H$  può essere scritta come segue

$$d\mu_t = E_H(d\mu) = \text{Tr}_P \left[ \rho_P \otimes \hat{1} U_t^\dagger \hat{1} \otimes d\mu U_t \right] . \quad (5.20)$$

Le versioni “infinitesime” delle equazioni (5.19) e (5.20) vengono usualmente dette master equation ed equazione di Langevin rispettivamente.

È stato dimostrato che la forma più generale di master equation è del tipo [54]

$$d\rho = dE_S(\rho) = \sum_k D[A_k] \rho , \quad (5.21)$$

con

$$D[A] \rho \equiv A \rho A^\dagger - \frac{1}{2} \{ A^\dagger A, \rho \} . \quad (5.22)$$

Nella (5.22)  $\{ , \}$  indica l'anticommutatore e  $A_k$  rappresenta un operatore in generale complesso.  $D[A]$  è anche detto “super-operatore”, in quanto operatore di operatori.

L'equazione di Langevin corrispondente alla (5.21) assume la forma

$$d d\mu = dE_H(d\mu) = \sum_k D^\vee[A_k] d\mu , \quad (5.23)$$

con

$$D^\vee[A]d\mu \equiv A^\dagger d\mu A - \frac{1}{2} \{A^\dagger A, d\mu\} . \quad (5.24)$$

Quando esiste una rappresentazione differenziale dell'equazione di Langevin si può ricavare un'equazione di Fokker-Planck, la cui forma esplicita dipende in generale dalla forma analitica della POM considerata e coincide con l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione della distribuzione di probabilità. Per le funzioni di Wigner  $W_s(\alpha, \alpha^*)$  esiste una rappresentazione differenziale per tutti i "super-operatori" che sono funzioni polinomiali di  $a$  e  $a^\dagger$  (i calcoli espliciti sono riportati nel paragrafo A.2). In tabella 5.1 sono riportate le rappresentazioni di Wigner per la moltiplicazione di  $\rho$  per  $a$  and  $a^\dagger$  a sinistra (L) e a destra (R) e le regole di composizione per ottenere la rappresentazione di un monomio qualsiasi.

Super-operatore	Rappresentazione di Wigner
$L[a] \doteq a \cdot$	$\alpha - \frac{1}{2}(s-1)\partial_{\bar{\alpha}}$
$L[a^\dagger] \doteq a^\dagger \cdot$	$\bar{\alpha} - \frac{1}{2}(s+1)\partial_{\alpha}$
$L[O_1 O_2] = L[O_1]L[O_2]$	
Super-operatore	Rappresentazione di Wigner
$R[a] \doteq \cdot a$	$\alpha - \frac{1}{2}(s+1)\partial_{\bar{\alpha}}$
$R[a^\dagger] \doteq \cdot a^\dagger$	$\bar{\alpha} - \frac{1}{2}(s-1)\partial_{\alpha}$
$R[O_1 O_2] = R[O_2]R[O_1]$	

Tabella 5.1: Super-operatori di moltiplicazione a sinistra (L) e a destra (R) e rappresentazioni di Wigner corrispondenti.

L'equazione di Fokker-Planck per la POM omodina è detta anche equazione di Ornstein-Uhlenbeck e si ottiene a partire dalla rappresentazione di Wigner attraverso l'integrazione marginale (5.18), sfruttando l'annullamento della  $W_s$  (che decade in modo esponenziale) all'infinito. Per esempio, l'equazione di Ornstein-Uhlenbeck per  $D[a]$  si ottiene nel modo seguente

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dvdu}{4\pi^2} e^{\frac{s}{8}(u^2+v^2)} \text{Tr} \left[ D[a] e^{iu(X-x)+iv(Y-y)} \right] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\pi} \left[ \frac{1}{2}(\partial_x x + \partial_y y) + \frac{1-s}{8}(\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2) \right] W_s(x, y) = \left( \frac{1}{2}\partial_x x + \frac{1-s}{8}\partial_{xx}^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\pi} W_s(x, y), \quad (5.25)$$

dove  $a = X + iY$  rappresenta la decomposizione di  $a$  nelle due quadrature canoniche (corrispondenti a  $\phi = 0$  e  $\phi = \pi/2$ ) e  $\alpha = x + iy$ .

Si noti che non tutti gli operatori che hanno una forma differenziale ben definita in rappresentazione di Wigner ammettono anche una rappresentazione marginale. L'operatore  $\alpha\partial_\alpha = \frac{1}{2}(x + iy)(\partial_x - i\partial_y)$ , per esempio, possiede termini lineari in  $y$  che non possono essere integrati. D'altra parte, uno stesso operatore differenziale di Ornstein-Uhlenbeck può essere ricavato come rappresentazione marginale di operatori di Wigner diversi. La rappresentazione di Ornstein-Uhlenbeck non è dunque né iniettiva né definita su tutta l'algebra dei super-operatori, al contrario della rappresentazione di Wigner. Nella tabella 5.2 sono riportate le rappresentazioni dei super-operatori utilizzati in questo capitolo.

Nel seguito verranno considerate soltanto equazioni di Fokker-Planck relative a dispositivi lineari, caratterizzate da un vettore di drift lineare nelle variabili di campo e da un coefficiente di diffusione costante

$$\partial_t W_s(\alpha, \alpha^*; t) = \left[ Q(\partial_\alpha \alpha + \partial_{\alpha^*} \alpha^*) + 2D_s \partial_{\alpha\alpha^*}^2 \right] W_s(\alpha, \alpha^*; t). \quad (5.26)$$

Un'equazione di questo tipo è risolvibile analiticamente e ammette la seguente soluzione Gaussiana

$$W_s(\alpha, \alpha^*; t) = \frac{1}{\pi \Delta_s^2(t)} \exp \left[ -\frac{|\alpha - \alpha_0 e^{-Qt}|^2}{\Delta_s^2(t)} \right], \quad (5.27)$$

dove

$$\Delta_s^2(t) = \frac{D_s}{Q}(1 - e^{-2Qt}) + \Delta_s^2(0)e^{-2Qt}. \quad (5.28)$$

L'equazione marginale corrispondente assume la forma

$$\partial_t P_s(x; t) = \left[ Q\partial_x x + \frac{1}{2}D_s \partial_{xx}^2 \right] P_s(x; t), \quad (5.29)$$

e possiede anch'essa soluzione Gaussiana, data da

$$P_s(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d_s^2(t)}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0 e^{-Qt})^2}{2d_s^2(t)} \right], \quad (5.30)$$

Super-operatore	Rappresentazione di Wigner	Marginale-X
$D[a]$	$\frac{1}{2}(\partial_{\alpha}\alpha + \partial_{\bar{\alpha}}\alpha^*) + \frac{1-s}{2}\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2$	$\frac{1}{2}\partial_{xx} + \frac{1-s}{8}\partial_{xx}^2$
$D[a^\dagger]$	$-\frac{1}{2}(\partial_{\alpha}\alpha + \partial_{\bar{\alpha}}\alpha^*) + \frac{1+s}{2}\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2$	$-\frac{1}{2}\partial_{xx} + \frac{1+s}{8}\partial_{xx}^2$
$[a^2, \cdot]$	$2\alpha\partial_{\bar{\alpha}} - s\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2$	—
$[a^{\dagger 2}, \cdot]$	$-2\alpha^*\partial_{\alpha} + s\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2$	—
$[a, [a, \cdot]]$	$\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2$	$\frac{1}{4}\partial_{xx}^2$
$[a^\dagger, [a^\dagger, \cdot]]$	$\partial_{\alpha\alpha}^2$	$\frac{1}{4}\partial_{xx}^2$
$D[a_\phi]$	$\frac{1}{4}\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2 - \frac{1}{8}(e^{2i\phi}\partial_{\alpha\alpha}^2 + e^{-2i\phi}\partial_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}^2)$	$\frac{1}{8}\sin^2\phi\partial_{xx}^2$
$[a^2 - a^{\dagger 2}, \cdot]$	$2(\alpha\partial_{\bar{\alpha}} + \alpha^*\partial_{\alpha}) - s(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \partial_{\bar{\alpha}\bar{\alpha}}^2)$	$2\partial_{xx} - \frac{1}{2}s\partial_{xx}^2$
$i[Y, a \cdot + \cdot a^\dagger]$	$\frac{1-s}{4}(\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2 + \partial_{\alpha\alpha}^2) + \frac{1-s}{2}\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2 + \frac{1}{2}(\alpha\partial_{\bar{\alpha}} + \alpha^*\partial_{\alpha} + \partial_{\alpha}\alpha + \partial_{\bar{\alpha}}\alpha^*)$	$\partial_{xx} + \frac{1-s}{4}\partial_{xx}^2$
$i[X, -ia \cdot + \cdot ia^\dagger]$	$\frac{1-s}{4}(\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2 + \partial_{\alpha\alpha}^2) + \frac{s-1}{2}\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2 + \frac{1}{2}(\alpha\partial_{\bar{\alpha}} + \alpha^*\partial_{\alpha} - \partial_{\alpha}\alpha - \partial_{\bar{\alpha}}\alpha^*)$	0
$i[Y, a^\dagger \cdot + \cdot a]$	$-\frac{1+s}{4}(\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2 + \partial_{\alpha\alpha}^2) - \frac{1+s}{2}\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2 + \frac{1}{2}(\alpha\partial_{\bar{\alpha}} + \alpha^*\partial_{\alpha} + \partial_{\alpha}\alpha + \partial_{\bar{\alpha}}\alpha^*)$	$\partial_{xx} - \frac{1+s}{4}\partial_{xx}^2$
$i[X, ia^\dagger \cdot - \cdot ia]$	$-\frac{1+s}{4}(\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2 + \partial_{\alpha\alpha}^2) + \frac{1+s}{2}\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2 + \frac{1}{2}(\alpha\partial_{\bar{\alpha}} + \alpha^*\partial_{\alpha} - \partial_{\alpha}\alpha - \partial_{\bar{\alpha}}\alpha^*)$	0
$i[Y, [a^\dagger, \cdot]]$	$-\frac{1}{2}(\partial_{\alpha\alpha}^2 + \partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2)$	$-\frac{1}{4}\partial_{xx}^2$
$i[X, [ia^\dagger, \cdot]]$	$\frac{1}{2}(-\partial_{\alpha\alpha}^2 + \partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2)$	0
$i[Y, [a, \cdot]]$	$\frac{1}{2}(\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2 + \partial_{\alpha\alpha}^2)$	$\frac{1}{4}\partial_{xx}^2$
$i[X, [-ia, \cdot]]$	$\frac{1}{2}(\partial_{\alpha\bar{\alpha}}^2 - \partial_{\alpha\alpha}^2)$	0

Tabella 5.2: Super-operatori di master equation e loro rappresentazioni differenziali di Wigner e marginale-X.

con

$$d_s^2(t) = \frac{D_s}{2Q}(1 - e^{-2Qt}) + d_s^2(0)e^{-2Qt} . \quad (5.31)$$

Si noti che i termini di diffusione nelle (5.26) e (5.29) dipendono in generale dall'efficienza quantica del rivelatore attraverso il parametro  $s$ , mentre il termine di drift ne è indipendente. Ciò significa che un rivelatore omodina o eterodina inefficiente ovviamente non produce alcun effetto rispetto al rivelatore ideale sul valore medio dell'osservabile misurata, che come si osserva dalle soluzioni (5.27) e (5.30) è legato al solo coefficiente di drift, mentre ne altera in generale la larghezza della distribuzione di probabilità, che è proporzionale alle varianze (5.28) e (5.31). Per termini di drift negativi  $Q < 0$ , che come vedremo nei prossimi paragrafi corrispondono a un processo di amplificazione, sono ammessi coefficienti di diffusione  $D_s$  anch'essi negativi, senza violare la positività della varianza nelle (5.28) e (5.31) durante l'evoluzione.

Nel seguito vedremo che le equazioni (5.26) e (5.29) descrivono diversi dispositivi lineari, e le soluzioni Gaussiane (5.27) e (5.30) modellizzano sia la codifica coerente che quella “squeezed” (i parametri delle distribuzioni di probabilità per questi tipi di codifica sono riportati in tab. 5.3).

	Stato coerente Rappr. di Wigner	Stato termico Rappr. di Wigner	$dP(\alpha, \alpha^*)$ Canale coerente
$\alpha_0$ $\Delta_s^2(0)$	$\alpha$ $\frac{1}{2}(1-s)$	0 $\frac{1}{2}(1-s) + \bar{n}$	0 $\bar{n}$
	Stato squeezed Rappr. marginale-X	Sovr. termica Rappr. marginale-X	$dP(\lambda)$ Canale quadratura
$x_0$ $d_s^2(0)$	$\lambda$ $\frac{1}{4}(\frac{1}{1+2\bar{n}} - s)$	0 $\frac{1}{4}(1-s) + \frac{\bar{n}}{2}$	0 $\bar{n}(\bar{n}+1)/2\bar{n} + 1$

Tabella 5.3: Valori iniziali di medie e varianze delle distribuzioni gaussiane relative alle eq. (5.27) e (5.30), corrispondenti alla codifica ottimale che raggiunge la capacità di canale.

## 5.4 Figura di rumore e informazione mutua

Tenendo conto di quanto esposto nei precedenti paragrafi di questo capitolo, è necessario introdurre delle definizioni più generali di guadagno e figura di rumore per un amplificatore (o attenuatore) rispetto a quelle date nel paragrafo 2.1, adatte solo al caso di alfabeto binario e di rivelazione ideale. Le definizioni che vengono introdotte nel seguito, valide per alfabeto di dimensione arbitraria e per rivelazione non efficiente, comprendono quelle del paragrafo 2.1 come casi particolari.

Come è già stato accennato, sia il guadagno che la figura di rumore di un dispositivo inserito in un canale di comunicazione quantistico dipendono in generale dall'intera configurazione della linea, cioè dal tipo di codifica e dal tipo e dal grado di efficienza dell'apparato di rivelazione. Il guadagno è dato, come abbiamo visto nel paragrafo 2.1, dal rapporto tra il segnale in uscita e quello in ingresso, dove per segnale si intende l'ampiezza della modulazione  $S \equiv \text{Tr}\{\Delta\rho\hat{O}\}$  dell'operatore rivelato  $\hat{O}$  rispetto a uno stato di riferimento  $\rho_0$  ( $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ ), che usualmente

è rappresentato dal vuoto. Per rivelazione omodina ed eterodina il guadagno è definito rispettivamente come segue

$$g[\Delta\rho, \mathcal{E} \circ \mathcal{D}_x^{(\eta)}] = \frac{\text{Tr}[\Delta\rho E_H(X_\eta)]}{\text{Tr}[\Delta\rho X_\eta]}, \quad (5.32)$$

$$g[\Delta\rho, \mathcal{E} \circ \mathcal{D}_\alpha^{(\eta)}] = \frac{\text{Tr}[\Delta\rho E_H(Z_\eta)]}{\text{Tr}[\Delta\rho Z_\eta]}, \quad (5.33)$$

dove  $X_\eta^n = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu_\eta(x)x^n$ , e analogamente  $Z_\eta^n = \int d^2\mu_\eta(\alpha, \alpha^*)\alpha^n$ . D'ora in avanti verrà adottato lo schema di Heisenberg. Si noti che per rivelazione eterodina il guadagno è in generale complesso e possiede informazioni sulla fase del campo. La figura di rumore, come abbiamo visto, descrive la degradazione del rapporto segnale-rumore all'interno del dispositivo e dipende anch'essa dal tipo di codifica e di rivelazione. Per modulazione on-off e segnali binari abbiamo visto che il rumore viene calcolato come media tra gli stati (*a priori* equiprobabili)  $\rho$  e  $\rho_0$ . Nel caso più generale di un alfabeto di dimensione arbitraria corrispondente a una matrice  $\bar{\rho}$  definita dall'equazione (5.1), il rumore viene valutato come media sulle probabilità *a priori* dell'alfabeto, cioè

$$N[\mathcal{C}_x \circ \mathcal{D}_x^{(\eta)}] = \int dP(\theta) \langle \Delta X_\eta^2 \rangle_{\rho_\theta} = \langle \Delta X_\eta^2 \rangle_{\bar{\rho}} - \overline{\Delta \langle X_\eta \rangle_{\rho_\theta}^2}, \quad (5.34)$$

dove

$$\langle \Delta \hat{O}^2 \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho \hat{O}^2) - [\text{Tr}(\rho \hat{O})]^2 \quad (5.35)$$

e

$$\overline{\Delta f^2(\theta)} = \int dP(\theta) f^2(\theta) - [\int dP(\theta) f(\theta)]^2. \quad (5.36)$$

Se il dispositivo è lineare il guadagno per definizione non dipende da  $\theta$ , e la figura di rumore assume la forma più semplice

$$R[\mathcal{C}_x \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{D}_x^{(\eta)}] = \frac{N[\mathcal{C}_x \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{D}_x^{(\eta)}]}{N[\mathcal{C}_x \circ \mathcal{D}_x^{(\eta)}]} \frac{1}{g^2}. \quad (5.37)$$

Nel caso di rivelazione eterodina occorre una definizione opportuna di rumore associato a una variabile complessa, ottenuta dalla rivelazione congiunta di due variabili reali. Richiediamo che per definizione il rumore sia una quantità reale e dovrà quindi tener conto delle fluttuazioni corrispondenti sia alla parte reale

che alla parte immaginaria dell'osservabile in esame. Si hanno allora in generale due valori per il rumore, che corrispondono agli autovalori della matrice bidimensionale di elementi

$$C_{ij} = \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle , \quad (5.38)$$

dove  $x_1 \equiv x$  e  $x_2 \equiv y$  corrispondono alle parti reale e immaginaria dell'osservabile considerata. Diagonalizzando la matrice (5.38) e tenendo presente le relazioni

$$\langle |\alpha|^2 \rangle - |\langle \alpha \rangle|^2 = C_{11} + C_{22} , \quad (5.39)$$

$$\langle \Delta \alpha^2 \rangle = C_{11} - C_{22} + i(C_{12} + C_{21}) , \quad (5.40)$$

i due valori del rumore nel caso di rivelazione eterodina assumono la forma

$$\frac{1}{2} \left[ \langle |Z_\eta|^2 \rangle_{\rho_\theta} - |\langle Z_\eta \rangle_{\rho_\theta}|^2 \pm |\langle \Delta Z_\eta^2 \rangle| \right] , \quad (5.41)$$

dove  $|Z_\eta|^2 = \int d^2 \mu_\eta(\alpha, \bar{\alpha}) |\alpha|^2$ . Per dispositivi "isotropi" nella fase del campo, come l'amplificatore phase insensitive o il beam splitter,  $\langle \Delta Z_\eta^2 \rangle = 0$  e il rumore è dato semplicemente da

$$N[\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{D}_\alpha^{(n)}] = \frac{1}{2} \left[ \langle \Delta |Z_\eta|^2 \rangle_{\bar{\rho}} - \overline{\Delta |\langle Z_\eta \rangle_{\rho_\theta}|^2} \right] , \quad (5.42)$$

con

$$\langle \Delta |O|^2 \rangle_\rho = \text{Tr}(\rho |O|^2) - |\text{Tr}(\rho O)|^2 , \quad (5.43)$$

e

$$\overline{\Delta |f(\theta)|^2} = \int dP(\theta) |f(\theta)|^2 - \left| \int dP(\theta) f(\theta) \right|^2 . \quad (5.44)$$

Per amplificatori lineari la figura di rumore in rivelazione eterodina è definita in modo analogo alla (5.37).

I valori medi della quadratura e del campo allo stadio di rivelazione si calcolano integrando la variabile considerata secondo la (5.27) e la (5.30) rispettivamente e si ottiene

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx P_s(x; T) x = x_0 \exp(-QT) \quad (5.45)$$

e

$$\langle \alpha \rangle = \int_C d^2 \alpha W_s(\alpha, \alpha^*; T) \alpha = \alpha_0 \exp(-QT) , \quad (5.46)$$

dove  $T$  rappresenta il tempo di evoluzione all'interno del dispositivo lineare inserito lungo la linea. Se si prende lo stato di vuoto come riferimento, il guadagno è dato da

$$g = \exp(-QT) \quad (5.47)$$

sia per rivelazione coerente che per rivelazione omodina e dipende solo dal coefficiente di drift. Le equazioni (5.26) e (5.29) descrivono quindi un processo di amplificazione lineare per  $Q < 0$  e un processo di attenuazione lineare per  $Q > 0$ . Calcoliamo ora la figura di rumore per il canale "squeezed" con rivelazione omodina inefficiente. Mediante semplici integrazioni gaussiane e utilizzando la tabella 5.3 si ottiene

$$\langle \Delta X_\eta^2 \rangle_{\bar{\rho}} = \frac{D_s}{2Q} + e^{-2QT} \left[ \frac{\bar{n}}{2} + \frac{1}{4}(1-s) - \frac{D_s}{2Q} \right] \quad (5.48)$$

e

$$\overline{\Delta \langle X_\eta \rangle_{\rho_\theta}^2} = e^{-2QT} \left[ \frac{\bar{n}}{2} + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{1+2\bar{n}} \right) \right]. \quad (5.49)$$

Ricordando che  $s = 1 - \eta^{-1}$  e utilizzando la definizione (5.34) si ricava facilmente la figura di rumore

$$R[\mathcal{C}_x \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{D}_x^{(\eta)}] = 1 + \frac{\eta(1+2\bar{n})}{1+2\bar{n}(1-\eta)} \frac{2D_{1-\eta^{-1}}}{Q} (g^{-2} - 1). \quad (5.50)$$

Nel caso di canale coerente con rivelazione eterodina, considerando un dispositivo lineare isotropo, si ottiene

$$\langle \Delta |Z_\eta|^2 \rangle_{\bar{\rho}} = \frac{D_s}{Q} + e^{-2QT} \left[ \bar{n} + \frac{1}{2}(1-s) - \frac{D_s}{Q} \right] \quad (5.51)$$

e

$$\overline{\Delta |\langle Z_\eta \rangle_{\rho_\theta}|^2} = \bar{n} e^{-2QT}. \quad (5.52)$$

Utilizzando poi la relazione  $s = 1 - 2\eta^{-1}$  e la definizione (5.42) si ricava la figura di rumore

$$R[\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{D}_\alpha^{(\eta)}] = 1 + \eta \frac{D_{1-2\eta^{-1}}}{Q} (g^{-2} - 1). \quad (5.53)$$

Quando l'apparato di rivelazione è ideale la figura di rumore, come abbiamo visto nel paragrafo 2.1, è limitata inferiormente dal valore ideale di Heisenberg  $R = 1$ .

Nelle espressioni (5.50) e (5.53) invece si possono ottenere per un amplificatore lineare ( $Q < 0$ ) figure di rumore  $R < 1$  nel caso di valori negativi del coefficiente di diffusione  $D_{1-\eta^{-1}}$ , che corrispondono a valori di  $\eta$  non unitari, come vedremo più in dettaglio nel prossimo paragrafo. La figura di rumore può allora essere minore di 1 per rivelazione inefficiente ( $\eta < 1$ ), e soltanto in questo caso un preamplificatore opportunamente scelto può migliorare le prestazioni del rivelatore.

Per rivelazione ideale, un amplificatore ideale ha figura di rumore unitaria e corrisponde a un puro termine di drift (negativo) nelle (5.26) e (5.29), senza termini diffusivi. Un'equazione di Fokker-Planck di questo tipo, con il solo termine di drift lineare, riscalda semplicemente le distribuzioni di probabilità (5.27) e (5.30) senza alterarne la forma, e dà quindi un puro riscaldamento della POM

$$A_H[d\mu(x)] = d\mu(g^{-1}x) \quad (5.54)$$

nel caso di rivelazione omodina e

$$A_H[d\mu(\alpha, \alpha^*)] = d\mu(g^{-1}\alpha, g^{-1}\alpha^*) \quad (5.55)$$

nel caso di rivelazione eterodina. Un semplice riscaldamento della POM, oltre a non degradare il rapporto segnale-disturbo, lascia anche invariata la mutua informazione, come verrà dimostrato in seguito. Per rivelazione ideale un amplificatore può allora soltanto degradare o nella migliore delle ipotesi lasciare inalterate la figura di rumore e la mutua informazione, mentre sono possibili miglioramenti solo per  $\eta < 1$ .

Calcoliamo ora la mutua informazione per il canale “squeezed”/quadratura in presenza di un generico dispositivo lineare descritto dall'equazione (5.26). Applicando la definizione (5.5) e utilizzando la soluzione (5.30) e la tabella 5.3 si ottiene

$$I[\mathcal{C}_x \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{D}_x^{(\eta)}] = \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)/(2\bar{n} + 1)}{\frac{D_{1-\eta^{-1}}}{2Q}(g^{-2} - 1) + \frac{1}{4} \left( \eta^{-1} - \frac{2\bar{n}}{1+2\bar{n}} \right)} \right]. \quad (5.56)$$

Per il canale coerente si procede in modo analogo e si ricava l'espressione

$$I[\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{D}_\alpha^{(\eta)}] = \log \left[ 1 + \frac{\bar{n}}{\frac{D_{1-2\eta^{-1}}}{Q}(g^{-2} - 1) + \eta^{-1}} \right]. \quad (5.57)$$

Analizziamo prima di tutto i due casi limite delle espressioni (5.56) e (5.57): quello di rivelazione ideale e quello di rivelazione non ideale in assenza di dispositivi lungo la linea.

i) Per rivelazione omodina e eterodina ideali si ottiene rispettivamente

$$I[\mathcal{C}_x \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{D}_x] = \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{4\bar{n}(\bar{n} + 1)/(2\bar{n} + 1)}{2(2\bar{n} + 1)\frac{D_0}{Q}(g^{-2} - 1) + 1} \right] \quad (5.58)$$

e

$$I[\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{E} \circ \mathcal{D}_\alpha] = \log \left[ 1 + \frac{\bar{n}}{\frac{D_0}{Q}(g^{-2} - 1) + 1} \right] . \quad (5.59)$$

Come è già stato anticipato in questo caso, che corrisponde al canale già ottimizzato in partenza, la mutua informazione rimane inalterata al valore della capacità di canale se viene inserito nella linea un amplificatore ideale (con coefficiente di diffusione nullo), mentre può solo peggiorare se il dispositivo non è ideale.

ii) Per rivelazione non efficiente in assenza di amplificatori o perdite lungo la linea di trasmissione ( $g = 1$ ) la mutua informazione assume la forma

$$I[\mathcal{C}_x \circ \mathcal{D}_x^{(\eta)}] = \frac{1}{2} \log \left[ 1 + 4 \frac{\bar{n}(\bar{n} + 1)\eta}{1 + 2\bar{n}(1 - \eta)} \right] \quad (5.60)$$

e

$$I[\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{D}_\alpha^{(\eta)}] = \log [1 + \eta\bar{n}] . \quad (5.61)$$

e risulta comunque degradata rispetto alla capacità di canale. In base alle considerazioni fatte nei paragrafi precedenti questo risultato era del tutto prevedibile: dato che l'effetto di inefficienze allo stadio di rivelazione è quello di allargare la distribuzione di probabilità dell'osservabile considerata, la probabilità di commettere errori nel determinare lo stato trasmesso aumenta e quindi l'informazione mutua diminuisce. Soltanto in questo caso allora, come si osserva anche dalle equazioni (5.56) e (5.57), l'introduzione di un amplificatore può aumentare la mutua informazione.

Nel prossimo paragrafo vedremo che per migliorare la mutua informazione in questo caso occorre un amplificatore in accordo con la POM di rivelazione: è necessario perciò utilizzare un amplificatore di quadratura (phase sensitive) per rivelazione omodina e un amplificatore coerente (phase insensitive) per rivelazione eterodina.

## 5.5 Master equation per amplificatori lineari

In questo paragrafo vengono descritte le master equation che corrispondono ad amplificatori ed attenuatori lineari e si mostrerà in particolare come vanno scelti i parametri di funzionamento per ottenere dispositivi ideali.

Consideriamo innanzi tutto il caso dell'amplificatore lineare phase insensitive. Tale amplificatore è descritto dalla seguente master equation

$$\partial_t \rho_t = 2 \left[ AD[a^\dagger] + BD[a] \right] \rho_t, \quad (5.62)$$

dove il super-operatore  $D$  è definito nell'equazione (5.21). Il dispositivo è phase insensitive come conseguenza dell'invarianza  $D[ae^{-i\phi}] = D[a]$  nella master equation. Il caso  $B > A$  descrive un processo di attenuazione, mentre  $A > B$  dà luogo all'amplificazione.

Questa trattazione è più generale di quella presentata nel capitolo 2, in quanto tutti i gradi di libertà esterni coinvolti nei processi di amplificazione e attenuazione vengono eliminati mediante l'operazione di traccia e viene così descritta la dinamica del solo modo di segnale, che dipende dal particolare sistema fisico considerato solo attraverso la forma dei parametri  $A$  e  $B$ . Ritroviamo ad esempio come caso particolare l'amplificatore a mezzo attivo in regime lineare descritto nel paragrafo 2.5 quando  $A$  e  $B$  sono proporzionali rispettivamente alle popolazioni atomiche dei livelli superiore e inferiore corrispondenti alla frequenza di risonanza con il segnale [90]. Per  $A = \frac{\Gamma}{2}\bar{m}$  e  $B = \frac{\Gamma}{2}(\bar{m} + 1)$ , invece, la stessa master equation (5.62) descrive il processo di attenuazione di un modo del campo con vita media del fotone  $\Gamma^{-1}$  verso lo stato termico con numero medio di fotoni  $\bar{m}$ .

L'equazione (5.62) ha la seguente soluzione [16]

$$\rho_t = \text{Tr}_P[U_t \rho \otimes \nu U_t^\dagger], \quad (5.63)$$

con

$$U_t = \begin{cases} \exp[-\arctan \sqrt{e^{\Gamma t} - 1}(ab^\dagger - a^\dagger b)] & (B > A), \\ \exp[-\text{arctanh} \sqrt{1 - e^{-\Gamma t}}(a^\dagger b^\dagger - ab)] & (A > B), \end{cases} \quad (5.64)$$

dove  $\Gamma/2 = |A - B|$  e  $\nu$  rappresenta lo stato termico del modo idler  $b$  con numero medio di fotoni  $\bar{m} = \min\{A, B\}/|A - B|$  ( $A$  e  $B$  sono necessariamente non negativi, altrimenti il modo idler avrebbe un numero medio di fotoni negativo). Nel caso in cui  $A > B$  l'equazione (5.62) descrive anche un processo di amplificazione

parametrica con modo idler termico (si ritrova l'amplificatore phase insensitive del paragrafo 2.4 per idler vuoto:  $B = 0$ ). Il caso  $B > A$  descrive invece un processo di attenuazione lineare che coincide con la trattazione sviluppata nel paragrafo 2.3 nel caso di idler vuoto ( $A=0$ ).

Dalla tabella 5.2 si ottiene facilmente la rappresentazione di Wigner dell'equazione (5.62) in forma di equazione di Fokker-Planck (5.26) con

$$Q = B - A \quad (5.65)$$

e

$$D_s = \frac{1}{2}[A + B + s(A - B)]. \quad (5.66)$$

Per rivelazione eterodina ideale ( $s = -1$ ) il dispositivo è ideale per  $B = 0$  (amplificatore phase insensitive ideale). Al contrario, il caso di attenuazione lineare non è mai ideale. Per rivelazione eterodina inefficiente il coefficiente di diffusione può diventare negativo e l'amplificatore può in tal caso migliorare il rapporto segnale-disturbo quando  $A - B > \eta A$ .

La mutua informazione per un canale coerente è data da

$$I[\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{D}_\alpha^{(\eta)}] = \log \left[ 1 + \frac{\bar{n}}{\left(\frac{A}{B-A} + \eta^{-1}\right)(g^{-2} - 1) + \eta^{-1}} \right] \quad (5.67)$$

dove  $g = \exp[(A - B)t]$ .

Nel limite di guadagni infiniti la (5.67) diventa

$$I[\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{D}_\alpha^{(\eta)}] = \log \left[ 1 + \bar{n} \frac{A - B}{A} \right] + O(g^{-2}) \quad (5.68)$$

e la capacità di canale viene raggiunta soltanto con l'inserimento di un amplificatore ideale per rivelazione eterodina ( $B = 0$ ). Confrontando la (5.61) e la (5.68) si può osservare che l'informazione mutua viene comunque aumentata, anche se non raggiunge la capacità di canale, soltanto per  $A - B > \eta A$ ; in caso contrario l'inserimento di un amplificatore lungo la linea ha il solo effetto di degradare ulteriormente la mutua informazione.

Come abbiamo visto, l'amplificatore phase insensitive descritto dalla (5.62) può essere reso ideale per rivelazione eterodina, in modo che la POM venga riscalata esattamente, e nel limite di guadagni infiniti è in grado di recuperare completamente sia il valore iniziale del rapporto segnale-disturbo sia la perdita di informazione dovuta alle inefficienze dei fotorivelatori. L'amplificatore phase insensitive

si accorda con la rivelazione eterodina, perchè in rivelazione eterodina il campo viene rivelato senza una fase privilegiata.

Quando non c'è accordo tra la mappa di amplificazione e la POM del rivelatore non è più possibile recuperare totalmente l'informazione persa, nemmeno per guadagni infiniti. Questo succede, ad esempio, quando un amplificatore phase insensitive (5.62) viene inserito in un canale squeezed con rivelazione omodina. In tal caso l'amplificatore è descritto dall'equazione di Ornstein-Uhlenbeck (5.29), e il coefficiente di diffusione  $\frac{1}{2}D_s$  viene valutato per  $s = 1 - \eta^{-1}$ , come risultato della proiezione marginale della POM (5.18). Il coefficiente di diffusione assume la forma

$$D_{1-\eta^{-1}} = A + \frac{1}{2}\eta^{-1}(B - A). \quad (5.69)$$

Per  $\eta = 1$  quindi  $D_0 = \frac{1}{2}(A + B) > 0$ , e l'amplificatore non è più ideale. Per  $\eta < 1$  il coefficiente di diffusione diventa negativo quando  $A - B > 2\eta A$ , e l'amplificatore è quindi in grado di migliorare il rapporto segnale-rumore soltanto per valori di efficienza quantica pari alla metà dei corrispondenti valori in rivelazione eterodina.

Anche se per  $\eta < \frac{1}{2}$  l'amplificatore può ridurre il rapporto segnale-rumore, non può comunque recuperare totalmente l'informazione perduta. Infatti, dall'equazione (5.56) si ottiene

$$I[\mathcal{C}_x \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{D}_x^{(\eta)}] = \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{4\bar{n}(\bar{n} + 1)}{(2\bar{n} + 1)\frac{2A}{B-A}(g^{-2} - 1) + (2\bar{n} + 1)\eta^{-1}g^{-2} - 2\bar{n}} \right] \quad (5.70)$$

che risulta sempre minore della capacità di canale (5.9) anche per  $\eta = 1$ , e nelle condizioni migliori ( $B = 0$ ) tende al valore  $I = \frac{1}{2} \log(1 + 2\bar{n})$  per  $g \rightarrow \infty$ .

Per migliorare le prestazioni dell'amplificatore in rivelazione omodina si può modificare la master equation (5.62) come segue

$$\partial_t \rho_t = 2 \left\{ AD[a^\dagger] + BD[a] \right\} \rho_t + C^*[a, [a, \rho_t]] + C[a^\dagger, [a^\dagger, \rho_t]], \quad (5.71)$$

con  $|C|^2 \leq AB$ .

La master equation (5.71) si può ottenere a partire da un amplificatore a mezzo attivo o con un bagno di atomi "squeezed" oppure utilizzando tre livelli atomici, tali che le transizioni tra il livello superiore e quello intermedio e tra il livello intermedio e quello superiore siano entrambe in risonanza con il segnale entrante, e preparando gli stati atomici in una sovrapposizione coerente tra il livello superiore e quello inferiore [90]. Un'altra possibilità, che verrà analizzata in questo

paragrafo, è rappresentata dall'impiego di un amplificatore parametrico phase insensitive lineare con l'idler  $b$  in uno stato termico "squeezed". In quest'ultimo caso, indicando con  $N$  e  $\bar{m}_s$  rispettivamente il numero di fotoni totali e il numero di fotoni di squeezing del modo idler, si ottiene

$$A = \frac{\Gamma}{2}(N + 1), \quad B = \frac{\Gamma}{2}N, \quad |C|^2 = \frac{\Gamma}{4}[N(N + 1) - \bar{m}(2\bar{m} + 1)], \quad (5.72)$$

dove  $\bar{m}$  indica in questo caso i soli fotoni termici. Il caso limite  $|C|^2 = AB$  corrisponde al modo idler nello stato di vuoto squeezed.

Dalla tabella 5.2 si vede che l'equazione di Ornstein-Uhlenbeck del dispositivo assume la forma (5.29) con lo stesso coefficiente di drift  $Q = B - A$  dell'amplificatore non squeezed, ma con coefficiente di diffusione

$$D_{1-\eta^{-1}} = A + \frac{1}{2}\eta^{-1}(B - A) + \text{Re}(C), \quad (5.73)$$

Per  $\text{Re}(C) < 0$  l'effetto globale dello squeezing è una riduzione della diffusione: per  $\eta = 1$  e  $\bar{m} = 0$  si ottiene

$$D_0 = \frac{\Gamma}{16}N^{-1} + O(N^{-2}), \quad (5.74)$$

e nel limite di squeezing infinito l'amplificatore diventa ideale per rivelazione omodina. Inoltre, in questo limite per  $\eta < 1$  il coefficiente di diffusione diventa negativo  $D_{1-\eta^{-1}} = \frac{Q}{2}(\eta^{-1} - 1)$  e dalla (5.56) si ottiene

$$\begin{aligned} I[\mathcal{C}_x \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{D}_x^{(\eta)}] &= \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{4\bar{n}(\bar{n} + 1)}{(2\bar{n} + 1)(\eta^{-1} - 1)g^{-2} + 1} \right] \\ &= \log(1 + 2\bar{n}) + O(g^{-2}). \end{aligned} \quad (5.75)$$

La capacità del canale viene così ripristinata.

Come conseguenza della non iniettività dell'integrazione marginale (5.18) esistono diversi modi di ottenere un'amplificazione ideale in quadratura. Come abbiamo visto nel paragrafo 2.6 anche l'amplificatore parametrico degenero con un modo di pompa classico (PSA) è ideale per rivelazione omodina. Tale amplificatore può essere ricondotto alla trattazione sviluppata in questo capitolo, in termini di coefficienti di drift e di diffusione, ricordando che l'evoluzione temporale della matrice densità è data da

$$\rho(t) = e^{-iHt} \rho_0 e^{iHt}, \quad (5.76)$$

con

$$H = i\frac{k}{2}(a^2 - a^{\dagger 2}). \quad (5.77)$$

Derivando rispetto al tempo la (5.76) si ricava la master equation

$$\partial_t \rho = -i[H, \rho]. \quad (5.78)$$

Utilizzando poi le corrispondenze della tabella 5.2 si ottiene un'equazione di Ornstein-Uhlenbeck della forma (5.29) con  $Q = k$  e  $\frac{1}{2}D_{1-\eta^{-1}} = \frac{Q}{2}(\eta^{-1} - 1)$ . Per rivelazione ideale il coefficiente di diffusione è sempre nullo, indipendentemente dal valore del drift. Si ottiene quindi un amplificatore ideale per  $k < 0$ , e un attenuatore ideale per  $k > 0$ .

## 5.6 Informazione mutua con perdite di linea

In questo paragrafo consideriamo il caso in cui lungo la linea di trasmissione è presente un dispositivo lineare puramente passivo e vediamo come va inserito un amplificatore per ottimizzare le prestazioni del canale. L'attenuatore lineare è descritto dalla mappa  $\mathcal{L}$  corrispondente all'equazione (5.62) con  $A = 0$  e  $B = \Gamma/2 \equiv \gamma$ . Analizziamo in particolare le prestazioni del canale coerente nelle due diverse configurazioni mostrate in fig. 5.3, in cui un amplificatore phase insensitive ideale (con  $A = T^{-1} \log g$  e  $B = 0$ ) è posto prima e dopo la perdita rispettivamente.

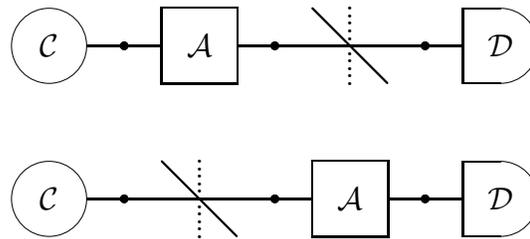


Figura 5.3: Configurazioni di un canale di comunicazione quantistico: amplificatore-perdita (in alto) e perdita-amplificatore (in basso).

In una configurazione di questo tipo, in cui i processi di amplificazione e di perdita sono ben distinti spazialmente lungo la linea di trasmissione del segnale,

non è più possibile utilizzare direttamente la (5.27). Analizziamo i due schemi separatamente.

*i) Amplificatore+perdita.*

L'evoluzione della POM viene calcolata come segue

$$dP_{g\gamma\eta}[\rho_\alpha](\beta) = \frac{d^2\beta}{\pi} \int \frac{d^2z}{\pi} \frac{1}{(1-\eta)\eta^{-1}} \exp\left\{-\frac{|\beta-z|^2}{(1-\eta)\eta^{-1}}\right\} \text{Tr} \left[ \rho_\alpha U_g^\dagger U_\gamma^\dagger |z\rangle\langle z| U_\gamma U_g \right], \quad (5.79)$$

dove  $U_g$  e  $U_\gamma$  rappresentano gli operatori unitari (5.64) in presenza di pura amplificazione e pura perdita rispettivamente. Sfruttando la proprietà di ciclicità dell'operazione di traccia si ottiene

$$dP_{g\gamma\eta}[\rho_\alpha](\beta) = \frac{d^2\beta}{\pi\eta^{-1}[1+\eta\gamma(g^2-1)]} \exp\left\{-\frac{|\beta-\gamma^{1/2}g\alpha|^2}{\eta^{-1}[1+\eta\gamma(g^2-1)]}\right\}, \quad (5.80)$$

e

$$dP_{g\gamma\eta}[\bar{\rho}](\beta) = \frac{d^2\beta}{\pi\eta^{-1}[1+\eta\gamma(g^2-1)+\eta\gamma g^2\bar{n}]} \times \exp\left\{-\frac{|\beta|^2}{\eta^{-1}[1+\eta\gamma(g^2-1)+\eta\gamma g^2\bar{n}]}\right\}. \quad (5.81)$$

Applicando la (5.5) si ottiene quindi la mutua informazione

$$I[\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{D}_\alpha^{(\eta)}] = \log \left[ 1 + \frac{\bar{n}}{1 + (1-\eta\gamma)/\eta\gamma g^2} \right]. \quad (5.82)$$

Come si osserva dalla (5.82), un preamplificatore phase insensitive ideale nel limite di guadagni infiniti riesce a compensare la perdita di informazione legata sia alle inefficienze dei rivelatori sia all'attenuazione del segnale lungo la linea di trasmissione e la capacità del canale viene ripristinata.

*ii) Perdita+amplificatore.*

Si procede in modo analogo al caso precedente, invertendo l'ordine di  $U_g$  e  $U_\gamma$ , e si ottiene

$$dP_{\gamma g\eta}[\rho_\alpha](\beta) = \frac{d^2\beta}{\pi\eta^{-1}[1+\eta(g^2-1)]} \exp\left\{-\frac{|\beta-\gamma^{1/2}g\alpha|^2}{\eta^{-1}[1+\eta(g^2-1)]}\right\}, \quad (5.83)$$

e

$$dP_{\gamma g \eta}[\bar{\rho}](\beta) = \frac{d^2\beta}{\pi\eta^{-1}[1 + \eta(g^2 - 1) + \eta\gamma g^2\bar{n}]} \times \exp\left\{-\frac{|\beta|^2}{\eta^{-1}[1 + \eta(g^2 - 1) + \eta\gamma g^2\bar{n}]}\right\}. \quad (5.84)$$

La mutua informazione in questo caso assume la forma

$$I[\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{D}_\alpha^{(\eta)}] = \log\left[1 + \frac{\gamma\bar{n}}{1 + (1 - \eta)/\eta g^2}\right]. \quad (5.85)$$

Come si può osservare dalla (5.85), la mutua informazione aumenta all'aumentare del guadagno fino a compensare totalmente gli effetti delle inefficienze allo stadio di rivelazione. Non viene però mai raggiunta la capacità del canale, che è stata irrimediabilmente degradata dalla presenza della perdita di linea. Per riuscire a riportare il valore della mutua informazione alla capacità del canale in presenza di perdite è necessario allora inserire l'amplificatore prima dell'attenuatore (cioè come preamplificatore, analogamente a quanto visto nel paragrafo 2.7 a proposito della figura di rumore). Si noti che però una configurazione di questo tipo comporta un aumento di potenza lungo la linea e può risultare incompatibile coi vincoli imposti dal canale stesso.

## 5.7 Amplificazione mediante feedback

Questo paragrafo è dedicato alla possibilità di progettare amplificatori lineari ideali sfruttando di meccanismi di feedback, che consistono nel modificare i parametri di funzionamento del sistema in funzione dei risultati di opportune misure (non demolitive) effettuate su di esso. Questo argomento è ancora oggetto di studio e ci limitiamo quindi a un breve accenno. Consideriamo soltanto il caso di rivelazione omodina, a partire dai risultati ottenuti da Wiseman e Milburn [75], i quali hanno dimostrato che è possibile produrre squeezing utilizzando procedure di feedback da misure quantistiche non demolitive all'interno della cavità. In questo schema la cavità è supporto di un secondo modo  $b$ , accoppiato al modo di segnale  $a$  attraverso l'Hamiltoniana di interazione

$$H_I = \chi X_a Y_b. \quad (5.86)$$

Questo secondo modo viene simultaneamente rivelato in quadratura (attraverso una misura di  $X_b$ ) con efficienza quantica  $\epsilon$ . L'evoluzione legata al feedback è della forma

$$\partial_t \rho_t|_{fb} = i \frac{\Lambda}{\epsilon \chi} I(t-0^+) [Y_a, \rho_t], \quad (5.87)$$

dove  $I(t-0^+)$  rappresenta la fotocorrente rivelata immediatamente prima l'azione di feedback. Nell'ipotesi che il modo  $b$  decada rapidamente verso lo stato di vuoto ( $\chi^2/\gamma \ll 1$ ), esso può essere eliminato adiabaticamente e si ottiene la seguente master equation per la matrice densità ridotta del modo di segnale

$$\partial_t \rho_t = L \rho_t + \frac{\Lambda^2}{2\hbar} D[Y] \rho_t + \Gamma D[X] \rho_t + i\Lambda [Y, [X \rho_t + \rho_t X]]. \quad (5.88)$$

Nella (5.88)  $L$  è dato dal secondo membro della (5.62),  $\hbar = \epsilon\Gamma$ ,  $\Gamma = \chi^2/\gamma$ , e  $\gamma$  è il *rate* di decadimento del modo  $b$ . Dalla tabella 5.2 può ricavare un'equazione di Ornstein-Uhlenbeck corrispondente alla master equation (5.88). Il termine con  $D[Y]$  dà luogo a un contributo  $\frac{\Lambda^2}{16\hbar}$  al coefficiente di diffusione  $D_s$ ; tale contributo può essere reso arbitrariamente piccolo per  $\hbar \propto \chi^2 \rightarrow \infty$ . Il termine con  $D[X]$  invece, che descrive la misura non demolitiva di  $X$ , non produce effetti sulla POM  $d\mu_\eta(x)$ . L'ultimo termine della (5.88) invece introduce un termine additivo  $\Lambda$  al coefficiente di drift, e un termine  $\frac{\Omega}{2}(\eta^{-1} - 1)$  al coefficiente di diffusione  $D_{1-\eta^{-1}}$ . Si può concludere allora che questo feedback intra-cavità, nei limiti di validità dell'approssimazione adiabatica, per  $\Lambda < 0$  può convertire un processo di perdita in uno di amplificazione, oppure migliorare le prestazioni dell'amplificatore originario, con l'aggiunta di un termine ideale nell'equazione (5.29).

Il sistema appena descritto è caratterizzato da un feedback in accordo con il tipo di rivelazione effettuata. Se non c'è questo accordo con la rivelazione le prestazioni del dispositivo non possono essere migliorate. Ciò accade, per esempio, se vengono scambiati i ruoli di  $X$  e  $Y$  nel sistema considerato.

L'efficacia del meccanismo di feedback è il risultato della competizione tra i termini forzanti e i termini di diffusione positivi dovuti a un'inevitabile introduzione di rumore a causa delle misure effettuate prima del feedback: come viene sottolineato in [76] il coefficiente di diffusione positivo viene raddoppiato quando la misura è di tipo eterodina, perchè in tal caso si ha un'efficienza quantica effettiva  $1/2$ , dovuta alla misura congiunta di entrambe le quadrature (che non commutano) [81].



# Conclusioni

In conclusione di questo lavoro di tesi riassumiamo brevemente i principali risultati ottenuti.

Dopo aver richiamato i principi di funzionamento degli amplificatori lineari ed aver messo in luce in particolare il ruolo del limite quantico alla figura di rumore in rivelazione diretta, sono state analizzate in modo dettagliato le prestazioni di processi parametrici trilineari totalmente quantistici come amplificatori e duplicatori di fotoni. Lo studio di Hamiltoniane quantistiche trilineari è motivato dal fatto che corrispondono a dispositivi ottici di facile impiego e nello stesso tempo rappresentano le più immediate approssimazioni alle Hamiltoniane di amplificatori e duplicatori ideali nel numero di fotoni, le quali invece non corrispondono a dispositivi facilmente realizzabili nella pratica. È stato dimostrato che i processi di amplificazione e duplicazione in rivelazione diretta non sono particolarmente efficienti e risultano meno convenienti rispetto all'uso dei comuni amplificatori lineari di tipo phase sensitive o phase insensitive. Al contrario, sono risultati decisamente efficaci i processi inversi di attenuazione e ricombinazione. L'origine del rumore aggiunto in questi processi è legata al fatto che il modo di "pompa quantistico" non viene mai convertito completamente nel modo amplificato e dà luogo a fluttuazioni non nulle nel segnale in uscita. Questo meccanismo gioca il ruolo analogo dell'emissione parametrica spontanea negli amplificatori parametrici lineari.

I risultati ottenuti dall'analisi dei processi trilineari hanno portato alla conclusione che l'approssimazione considerata, che consiste essenzialmente nel trascurare la dipendenza dall'intensità del segnale incidente nella costante di accoppiamento che compare nell'Hamiltoniana di interazione, non è sufficientemente accurata per avvicinarsi a comportamenti ideali. La forma della costante di accoppiamento nelle Hamiltoniane ideali è tipica di sistemi atomici interagenti con il campo

elettromagnetico in presenza di meccanismi di saturazione e ciò ha suggerito uno studio approfondito del processo di amplificazione in presenza di effetti altamente non lineari di saturazione.

L'analisi è stata condotta in un approccio basato su equazioni di Fokker-Planck, particolarmente adatto a trattare sistemi in cui sono coinvolti segnali intensi in ingresso, che rappresenta il caso più frequente nelle applicazioni pratiche. L'elevato grado di non linearità dei sistemi presi in esame e la necessità di studiare la dinamica nel transiente impediscono di risolvere il problema analiticamente. Inoltre, per dimensioni maggiori di 1 i metodi numerici tradizionali di integrazione diretta comportano un tale dispendio di tempo di calcolo che risultano praticamente improponibili. È stato quindi sviluppato specificamente un metodo di simulazione Monte Carlo per descrivere l'evoluzione dinamica completa del sistema. Tale metodo è particolarmente adatto all'analisi di sistemi multidimensionali e si è rivelato particolarmente efficiente nel fornire previsioni con una statistica molto affidabile.

L'applicazione del metodo Monte Carlo al caso di amplificatori saturabili ha mostrato come gli effetti di saturazione siano determinanti per superare il limite quantico degli amplificatori lineari. È stato dimostrato in particolare che in un regime intermedio di funzionamento, che è stato chiamato regime *saturante*, è possibile ottenere figure di rumore molto vicine al limite ideale e comunque largamente inferiori al limite quantico, senza che il guadagno risulti eccessivamente ridotto rispetto al caso lineare. L'origine di questo fenomeno è legata al fatto che i meccanismi stessi di saturazione portano a una riduzione del rumore in uscita associato all'amplificazione dell'emissione spontanea presente all'interno del sistema atomico, in quanto tagliano la coda ad alta intensità nella distribuzione di probabilità del numero di fotoni.

Sono stati infine analizzati gli effetti dell'inserimento di un amplificatore lineare in un canale di comunicazione quantistico non ideale, in presenza cioè di perdite lungo la linea di trasmissione e inefficienze allo stadio di rivelazione. Sono stati innanzitutto generalizzati i concetti di guadagno e figura di rumore al caso di alfabeto di dimensione arbitraria e di rivelazione non efficiente, introducendo nel caso di rivelazione eterodina la definizione di rumore associato a osservabili complesse. È stato dimostrato in particolare che l'inserimento di un amplificatore opportuno in presenza di rivelatori non ideali può portare a figure di rumore minori dell'unità.

Si è mostrato inoltre che se un canale è ottimizzato in partenza, in assenza cioè

di perdite di linea o di inefficienze nei fotocontatori e con una scelta appropriata della codifica utilizzata in funzione del tipo di rivelazione adottato, esso funziona già al limite della sua capacità e non c'è alcun bisogno di amplificare i segnali trasmessi lungo la linea. L'inserimento di un amplificatore lineare invece è risultato estremamente efficace nel caso in cui il canale di comunicazione non è ideale (a causa di una corrispondenza imperfetta tra codifica e sistema di rivelazione, di perdite di linea o di valori non unitari dell'efficienza quantica del rivelatore), e nello stesso tempo la scelta del tipo di amplificatore viene effettuata in modo appropriato in funzione del tipo di codifica del canale e del tipo di rivelazione allo stadio finale. In queste condizioni, l'informazione mutua del canale viene riportata al valore della capacità nel limite di guadagni infiniti. È stato infine dimostrato che un amplificatore ideale in accordo con il tipo di rivelazione ideale è descritto da un'equazione di Fokker-Planck con il solo termine di drift, che come tale non altera nè la figura di rumore nè l'informazione mutua del canale. Quando non c'è accordo con il tipo di rivelatore, le condizioni di funzionamento dell'amplificatore possono essere modificate opportunamente in modo da ridurre il più possibile il coefficiente di diffusione e avvicinarsi così al regime ideale, utilizzando ad esempio un modo idler "squeezed" oppure introducendo meccanismi di feedback in accordo con il tipo di rivelazione considerato.

# Appendici

## A.1 Stati coerenti e stati “squeezed” della radiazione

Gli stati coerenti sono stati originariamente introdotti da Glauber per descrivere l’alto grado di coerenza della luce laser. La coerenza ottica massima corrisponde alla fattorizzazione a tutti gli ordini delle funzioni di Green normalmente ordinate del campo elettrico e si ottiene quando lo stato della radiazione è un autostato della componente a frequenza positiva del campo. Per un singolo modo del campo corrispondente all’operatore di distruzione  $a$ , uno stato coerente  $|\alpha\rangle$  soddisfa l’equazione agli autovalori

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle , \quad (\text{A.1})$$

dove  $\alpha$  è un numero complesso. Lo stato coerente  $|\alpha\rangle$  può essere ottenuto a partire dallo stato di vuoto  $|0\rangle$  come segue

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle , \quad (\text{A.2})$$

dove l’operatore  $\hat{D}(\alpha)$  è definito

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) . \quad (\text{A.3})$$

L’operatore  $\hat{D}(\alpha)$  è detto “di spostamento” perchè agisce sull’operatore  $a$  come una traslazione

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)a\hat{D}(\alpha) = a + \alpha . \quad (\text{A.4})$$

Si può verificare facilmente che gli stati coerenti sono stati a minima indeterminazione per qualsiasi coppia di quadrature coniugate del campo, ovvero

$$\langle \Delta a_\phi^2 \rangle \langle \Delta a_{\phi+\pi/2}^2 \rangle = \frac{1}{16} , \quad (\text{A.5})$$

dove per definizione  $a_\phi = \frac{1}{2}(ae^{-i\phi} + a^\dagger e^{i\phi})$ . In particolare

$$\langle \Delta a_\phi^2 \rangle = \frac{1}{4}, \quad (\text{A.6})$$

cioè le fluttuazioni del campo sono isotrope (indipendenti dalla fase). L’espressione (A.6) è valida anche per lo stato di vuoto, sebbene i valori medi delle quadrature siano nulli: anch’esso è quindi sede di fluttuazioni quantistiche. Gli stati coerenti hanno dunque le stesse fluttuazioni del vuoto, mentre il valore medio è traslato come segue

$$\langle a_\phi \rangle = \alpha_\phi = \frac{1}{2}(\alpha e^{i\phi} + \alpha^* e^{-i\phi}). \quad (\text{A.7})$$

La decomposizione degli stati coerenti sulla base degli stati numero è data da

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (\text{A.8})$$

e la distribuzione di probabilità nella rappresentazione numero è la distribuzione di Poisson

$$|\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (\text{A.9})$$

Per uno stato coerente il valor medio e la varianza del numero di fotoni assumono lo stesso valore

$$\langle \alpha|\hat{n}|\alpha\rangle = \langle \alpha|\Delta \hat{n}^2|\alpha\rangle = |\alpha|^2. \quad (\text{A.10})$$

Per caratterizzare la distribuzione di probabilità nel numero di fotoni di uno stato si introduce la quantità

$$F = \frac{\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle}{\langle \hat{n} \rangle}, \quad (\text{A.11})$$

detta fattore di Fano. Per la distribuzione di Poisson si ha  $F = 1$ , mentre vengono generalmente detti “subpoissoniani” gli stati con  $F < 1$  e “superpoissoniani” quelli con  $F > 1$ .

Gli stati squeezed sono anch’essi stati di minima indeterminazione, ma anisotropi in fase, cioè hanno fluttuazioni in quadratura dipendenti dalla fase della quadratura stessa

$$\begin{aligned} \langle \Delta a_\phi^2 \rangle \langle \Delta a_{\phi+\pi/2}^2 \rangle &= \frac{1}{16}, \\ \langle \Delta a_\phi^2 \rangle &= f(\phi). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Essi si costruiscono traslando lo stato di vuoto “squeezed”, ovvero lo stato con  $\langle a \rangle = 0$  (ma con valor medio di fotoni  $\langle \hat{n} \rangle > 0$ ) e  $\langle \Delta a_\phi^2 \rangle = f(\phi)$

$$|\alpha, \zeta\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle. \quad (\text{A.13})$$

Nell' eq. (A.13)  $\hat{S}(\zeta)$  indica l'operatore di squeezing

$$\hat{S}(\zeta) = \exp \left[ \frac{1}{2} \left( \zeta (a^\dagger)^2 - \zeta^* a^2 \right) \right]. \quad (\text{A.14})$$

Tale operatore agisce sul distruttore  $a$  nel modo seguente

$$\hat{S}^\dagger(\zeta)a\hat{S}(\zeta) = \mu a + \nu a^\dagger, \quad (\text{A.15})$$

dove

$$\mu = \cosh \rho, \quad \nu = e^{i\psi} \sinh \rho, \quad \zeta = \rho e^{i\psi}. \quad (\text{A.16})$$

Per esempio, per  $\zeta = r \in R, r \geq 0$  si ha

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \alpha \\ \langle \Delta a_0^2 \rangle &= \frac{1}{4} |\mu + \nu|^2 = \frac{1}{4} e^{2r} \\ \langle \Delta a_{\pi/2}^2 \rangle &= \frac{1}{4} |\mu - \nu|^2 = \frac{1}{4} e^{-2r}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Dalla (A.17) è evidente come le fluttuazioni in quadratura vengano ridotte per una quadratura e amplificate per quella coniugata rispetto alle fluttuazioni di uno stato coerente, mentre il prodotto rimane quello di indeterminazione minima. Gli stati squeezed hanno un numero medio di fotoni maggiore dello stato coerente da cui sono stati ottenuti

$$\langle \hat{n} \rangle = |\alpha|^2 + |\nu|^2. \quad (\text{A.18})$$

I fotoni  $|\nu|^2$  in eccesso rispetto allo stato coerente corrispondente sono detti fotoni di squeezing. Le fluttuazioni risultano dipendenti dalla fase di  $\zeta$  (detta anche “direzione di squeezing”)

$$\langle \Delta \hat{n}^2 \rangle = 2|\mu\nu|^2 + |\mu\alpha + \nu\alpha^*|^2. \quad (\text{A.19})$$

La distribuzione di probabilità del numero dunque, diversamente da quella degli stati coerenti, non è in generale poissoniana.

## A.2 Funzioni di Wigner

Gli stati coerenti sono un insieme non ortogonale “over-completo” di stati, per i quali vale la relazione

$$\int_C \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \hat{1}. \quad (\text{A.20})$$

Una conseguenza interessante di questa proprietà è che qualsiasi operatore può essere rappresentato in modo completo dagli elementi di matrice diagonali tra stati coerenti. La funzione seguente genera infatti tutti gli elementi di matrice dell'operatore considerato nella rappresentazione numero

$$\langle\alpha|\hat{O}|\alpha\rangle \exp|\alpha|^2 = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*m}\alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|\hat{O}|n\rangle. \quad (\text{A.21})$$

Un'altra conseguenza dell'over-completezza degli stati coerenti è la possibilità di poter realizzare rappresentazioni coerenti della matrice densità non equivalenti tra loro. Ad esempio, per un generico stato quantistico della radiazione la matrice densità può essere scritta come decomposizione sugli stati coerenti nel modo seguente

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha|, \quad (\text{A.22})$$

dove  $P(\alpha, \alpha^*)$  è detta funzione di Glauber-Sudarshan o semplicemente funzione  $P$  e

$$\int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) = 1. \quad (\text{A.23})$$

La funzione  $P$  non è in generale definita positiva, ma è una quasi-probabilità. Per stati coerenti è una funzione delta di Dirac, mentre per stati numero è una sovrapposizione di derivate della funzione delta. Gli stati che hanno una rappresentazione  $P$  singolare, come ad esempio gli stati numero, sono comunemente chiamati non classici.

La funzione di Husimi (o funzione  $Q$ ), definita come segue

$$Q(\alpha, \alpha^*) = \langle\alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle \quad (\text{A.24})$$

è invece definita positiva ed è anch'essa normalizzata

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} Q(\alpha, \alpha^*) = 1. \quad (\text{A.25})$$

Essa rappresenta pertanto una vera distribuzione di probabilità. Non può comunque essere interpretata come probabilità che il sistema si trovi nello stato coerente  $|\alpha\rangle$ , perchè gli stati coerenti non sono ortogonali.

Le funzioni  $P$  e  $Q$  sono generatrici dei momenti ordinati in modo normale e anti-normale rispettivamente, ovvero

$$\text{Tr}(\hat{\rho} a^{\dagger n} a^m) = \int P(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*n} \alpha^m d^2\alpha, \quad (\text{A.26})$$

$$\text{Tr}(\hat{\rho} a^m a^{\dagger n}) = \int Q(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*n} \alpha^m \frac{d^2\alpha}{\pi}. \quad (\text{A.27})$$

Si possono definire più in generale delle quasi-probabilità (funzioni di Wigner) nel modo seguente

$$W_s(\alpha, \alpha^*) = \int X_s(\lambda, \lambda^*) \exp(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda) \frac{d^2\lambda}{\pi}, \quad (\text{A.28})$$

trasformate di Fourier della funzione caratteristica

$$X_s(\lambda, \lambda^*) = \text{Tr}[\hat{\rho} \exp(\lambda a^\dagger - \lambda^* a)] \exp\left(\frac{1}{2}s|\lambda|^2\right). \quad (\text{A.29})$$

La (A.29) è funzione generatrice dei momenti  $s$ -ordinati

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\hat{\rho} \{a^{\dagger n} a^m\}_s] &= \left. \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \frac{\partial^m}{\partial (-\lambda^*)^m} \right|_{\lambda=0} X_s(\lambda, \lambda^*) \\ &= \int W_s(\alpha, \alpha^*) \alpha^{*n} \alpha^m \frac{d^2\alpha}{\pi}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Le funzioni  $P$  e  $Q$  si ottengono come casi particolari della (A.28), infatti

$$W_1(\alpha, \alpha^*) = \pi P(\alpha, \alpha^*), \quad W_{-1}(\alpha, \alpha^*) = Q(\alpha, \alpha^*). \quad (\text{A.31})$$

Il caso relativo ad  $s = 0$  corrisponde invece alla funzione generatrice dei prodotti simmetrizzati. In tal caso la distribuzione di probabilità  $W_0(\alpha, \alpha^*)$  è definita positiva soltanto per stati coerenti e squeezed e assume forma gaussiana.

Per passare da un'equazione operatoriale di evoluzione per la matrice densità (master equation) a un'equazione di evoluzione per le distribuzioni di probabilità  $W_s(\alpha, \alpha^*)$  è sufficiente tener presente le seguenti relazioni

$$\frac{\partial D_s(\lambda, \lambda^*)}{\partial \lambda} = \left[ \frac{1}{2}(s-1)\lambda^* + a^\dagger \right] D_s(\lambda, \lambda^*), \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{\partial D_s(\lambda, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} = \left[ \frac{1}{2}(s+1)\lambda - a \right] D_s(\lambda, \lambda^*), \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\partial D_s(\lambda, \lambda^*)}{\partial \lambda} = D_s(\lambda, \lambda^*) \left[ \frac{1}{2}(s+1)\lambda + a^\dagger \right], \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial D_s(\lambda, \lambda^*)}{\partial \lambda^*} = D_s(\lambda, \lambda^*) \left[ \frac{1}{2}(s-1)\lambda - a \right], \quad (\text{A.35})$$

dove

$$D_s(\lambda, \lambda^*) \equiv \exp \left( \lambda a^\dagger - \lambda^* a + \frac{1}{2} s |\lambda|^2 \right) . \quad (\text{A.36})$$

Tenendo presenti le definizioni (A.28) e (A.29), si ottengono facilmente le regole di moltiplicazione date in Tab. 5.1 del capitolo 5.

### A.3 Rivelazione omodina

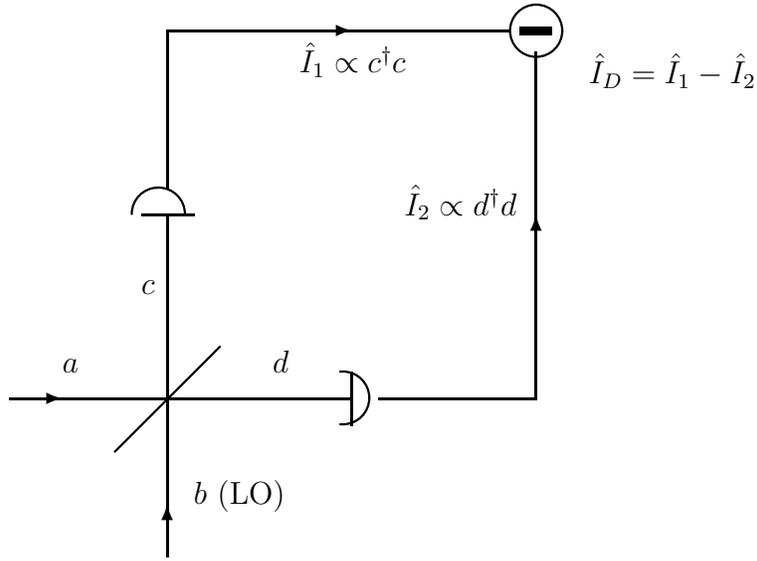


Figura A.1: Schema di un rivelatore omodina.

Un rivelatore omodina, mostrato in figura A.1, è costituito essenzialmente da un beam splitter bilanciato (con trasmissività pari a 1/2) e due fotorivelatori. I due modi incidenti all'ingresso del beam splitter sono il modo di segnale  $a$  e un oscillatore locale intenso  $b$  alla stessa frequenza del modo  $a$ , che può essere trattato classicamente. Allo stadio finale viene misurata la differenza tra le correnti elettriche rivelate dai due fotocontatori, ovvero

$$\hat{I}_D = c^\dagger c - d^\dagger d . \quad (\text{A.37})$$

Utilizzando le relazioni di trasformazione dei campi per un beam splitter, date nel paragrafo 2.3, la corrente differenza  $I_D$  assume la forma

$$\hat{I}_D = a^\dagger b + b^\dagger a . \quad (\text{A.38})$$

Tenendo presente che l'oscillatore locale si trova in uno stato coerente  $|z\rangle$  molto eccitato il valor medio è dato da

$$\langle \hat{I}_D \rangle = z \langle a^\dagger \rangle + z^* \langle a \rangle, \quad (\text{A.39})$$

dove  $z = |z|e^{i\phi}$  e  $\phi$  rappresenta lo sfasamento rispetto al modo  $a$ . Si può calcolare la corrente ridotta

$$\hat{i} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} (2|z|)^{-1} \hat{I}_D, \quad (\text{A.40})$$

il cui valore medio e le corrispondenti fluttuazioni sono dati da

$$\langle \hat{i} \rangle = \frac{1}{2} \langle a^\dagger e^{-i\phi} + a e^{i\phi} \rangle \equiv \langle a_\phi \rangle \quad (\text{A.41})$$

$$\langle \Delta \hat{i}^2 \rangle = \langle \Delta a_\phi^2 \rangle + \mathcal{O}(|z|^{-2}). \quad (\text{A.42})$$

Misurando tale corrente si misura allora la quadratura del campo.

## A.4 Rivelazione eterodina

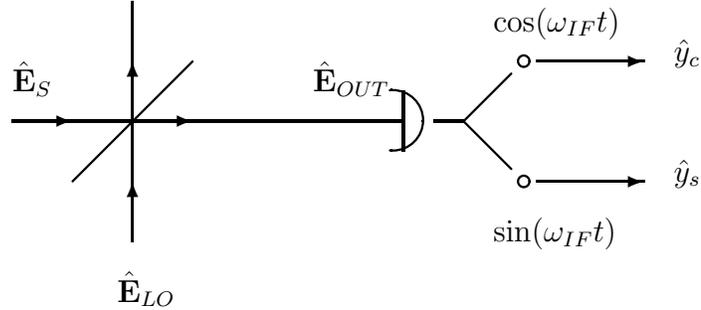


Figura A.2: Schema di un rivelatore eterodina.

Lo schema di un rivelatore eterodina è mostrato in figura A.2 e misura l'ampiezza complessa del campo incidente  $\hat{\mathbf{E}}_S$  attraverso la misura di due quadrature coniugate. Il fotocontatore in uscita misura la corrente

$$\hat{I}_{OUT}(\omega_{IF}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\mathbf{E}}_{OUT}^{(-)}(\omega + \omega_{IF}) \cdot \hat{\mathbf{E}}_{OUT}^{(+)}(\omega) \quad (\text{A.43})$$

alla frequenza  $\omega_{IF} = \omega_S - \omega_0$ , dove  $\omega_S$  e  $\omega_0$  rappresentano le frequenze del modo di segnale da misurare e dell'oscillatore locale rispettivamente. Nella (A.43)  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$  ed  $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$  rappresentano le componenti del campo elettrico a frequenza positiva e negativa rispettivamente.

Il campo all'uscita del beam splitter è dato dalla relazione

$$\hat{\mathbf{E}}_{OUT}^{(+)} = \eta^{1/2} \hat{\mathbf{E}}_S^{(+)} + (1 - \eta)^{1/2} \hat{\mathbf{E}}_{LO}^{(+)} , \quad (\text{A.44})$$

e le componenti dei campi che contribuiscono nel calcolo della (A.43) sono

$$\hat{\mathbf{E}}_S^{(+)}(t) \propto a_s e^{i(\omega_0 + \omega_{IF})t} + a_i e^{i(\omega_0 - \omega_{IF})t} \quad (\text{A.45})$$

$$\hat{\mathbf{E}}_{LO}^{(+)}(t) \propto b_l e^{i\omega_0 t} + b_i e^{i(\omega_0 - \omega_{IF})t} + b_s e^{i(\omega_0 + \omega_{IF})t} , \quad (\text{A.46})$$

dove gli indici  $i, s, b$  indicano le componenti del campo alla frequenza di segnale ( $\omega_S$ ), alla frequenza “immagine” ( $\omega_0 - \omega_{IF}$ ) e alla frequenza dell'oscillatore locale ( $\omega_0$ ). Tenendo presente che  $b_l$  si trova in uno stato coerente  $|z\rangle$  molto eccitato e che  $\langle a_i \rangle = \langle b_i \rangle = \langle b_s \rangle = 0$ , si calcola la corrente ridotta

$$\hat{i} = \lim_{\eta \rightarrow 1, |z| \rightarrow \infty, \gamma = \text{cost.}} \gamma^{-1} \hat{I}_{OUT}(\omega_{IF}) \quad (\text{A.47})$$

con

$$\gamma = \eta^{1/2} (1 - \eta)^{1/2} |z| . \quad (\text{A.48})$$

Le componenti “seno” e “coseno” di tale corrente sono date da

$$\hat{i}_c = \text{Re} \hat{i} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{i}(t) \cos \omega t = \frac{1}{2} (\hat{i} + \hat{i}^\dagger) \quad (\text{A.49})$$

$$\hat{i}_s = \text{Im} \hat{i} = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{i}(t) \sin \omega t = \frac{1}{2i} (\hat{i} - \hat{i}^\dagger) \quad (\text{A.50})$$

e assumono la forma

$$\langle \hat{i}_c \rangle = \frac{1}{2} \langle a_s^\dagger e^{-i\phi} + a_s e^{i\phi} \rangle \equiv \langle a_{s\phi} \rangle \quad (\text{A.51})$$

$$\langle \hat{i}_s \rangle = \frac{1}{2i} \langle a_s^\dagger e^{-i\phi} - a_s e^{i\phi} \rangle \equiv \langle a_{s\phi + \pi/2} \rangle \quad (\text{A.52})$$

$$\langle \Delta \hat{i}_c^2 \rangle = \langle \Delta a_{s\phi}^2 \rangle + \langle \Delta a_{i\phi}^2 \rangle \quad (\text{A.53})$$

$$\langle \Delta \hat{i}_s^2 \rangle = \langle \Delta a_{s\phi + \pi/2}^2 \rangle + \langle \Delta a_{i\phi + \pi/2}^2 \rangle . \quad (\text{A.54})$$

Il rivelatore eterodina misura perciò due quadrature coniugate del campo simultaneamente o, equivalentemente, misura l'ampiezza complessa del campo.

# Bibliografia

- [1] N. B. Abraham, Phys. Rev. A **21**, 1595 (1980).
- [2] M. Artiglia, P. Di Vita, M. Potenza, J. Opt. Comm. **13** (1992), 104.
- [3] M. Artiglia, M. Potenza, Alta Frequenza **4** (1992), 217.
- [4] R. Baltin, J. Phys. A **16**, 2721 (1983); Phys. Lett. A **102**, 332 (1984).
- [5] R. A. Brandt and O. W. Greenberg J. Math. Phys. **10**, 1168 (1969).
- [6] S. L. Braunstein, Phys. Rev. A **42**, 474 (1990).
- [7] P. N. Butcher and D. Cotter, *The elements of nonlinear optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [8] H. Carmichael, *An open systems approach to quantum optics*, Lecture Notes in Physics m18, Springer-Verlag (1993).
- [9] C. M. Caves, Phys. Rev. D**26** 1817 (1982).
- [10] C. M. Caves, P. D. Drummond, Rev. Mod. Phys. **66**, 481 (1994).
- [11] G. M. D'Ariano in *Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations* ed. by D. Han, J. S. Kim, and W. W. Zachary, NASA CP-3135 (1992) p. 311.
- [12] G. M. D'Ariano, Phys. Rev. A **41**, 2636 (1990).
- [13] G. M. D'Ariano, Phys. Rev. A **43**, 2550 (1991).
- [14] G. M. D'Ariano, Phys. Rev. A **45**, 3224 (1992).
- [15] G. M. D'Ariano, Int. J. Mod. Phys. B**6**, 1291 (1992).

- [16] G. M. D'Ariano, Phys. Lett. A **187**, 231 (1994).
- [17] G. M. D'Ariano, C Macchiavello, Phys. Rev. A **48**, 3947 (1993).
- [18] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, in Computer Simulations in Nonlinear Optics: CSNO '93 International Workshop, V. L. Derbov and S. K. Potapov Eds., Proc. SPIE 2098 (1994), p.47.
- [19] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, V. Annovazzi-Lodi, S. Donati, in Fotonica 93-Terzo convegno nazionale sulle tecniche fotoniche per l'informazione, Arezzo 28-30 Aprile 1993, Atti, p. 355.
- [20] G. M. D'Ariano, C Macchiavello, S. Moroni, Mod. Phys. Lett. B **8**, 239 (1994).
- [21] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, M. G. A. Paris, in Second International Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations, ed. da D.Han et al. (NASA Conf. Public. 3219, Washington DC, 1992), p.71.
- [22] G. M. D'Ariano, C Macchiavello, M. G. A. Paris, Phys. Rev. A. **50**, 4298 (1994).
- [23] G. M. D'Ariano, C Macchiavello, M. G. A. Paris, Phys. Lett. A **195**, 31 (1994).
- [24] G. M. D'Ariano, C Macchiavello, M. G. A. Paris, Phys. Rev. Lett. **73**, 31187 (1994).
- [25] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, M. G. A. Paris, in Quantum Communication and Measurement, ed. da V. P. Belavkin et al., Springer, in corso di stampa.
- [26] G. M. D'Ariano, C Macchiavello, M. G. A. Paris, inviato a Phys. Rev. Lett.
- [27] G. M. D'Ariano, C Macchiavello, M. G. A. Paris, Nuovo Cimento B, in corso di stampa.
- [28] G. M. D'Ariano, C Macchiavello, M. G. A. Paris, Phys. Lett. A., in corso di stampa.
- [29] G. M. D'Ariano, M. G. A. Paris, Phys. Rev. A **48** R4039 (1993).

- [30] G. M. D'Ariano, M. G. A. Paris, Phys. Rev. A **49** 3022 (1994).
- [31] E. B. Davies *Quantum theory of open systems*, Academic Press London (1976).
- [32] G. Drobný, I. and Jex, Phys. Rev. A **46**, 499 (1992).
- [33] S. Friberg, L. Mandel, Opt. Comm. **46**, 141 (1983).
- [34] P. García-Fernández, F. J. Bermejo, Phys. Rev. A **37**, 4490 (1988).
- [35] P. García-Fernández, F. J. Bermejo, Opt. Comm. **76**, 173 (1990).
- [36] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, Springer (Berlin 1983).
- [37] C. W. Gardiner, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1991).
- [38] C. W. Gardiner, A. S. Parkins, and P. Zoller, Phys. Rev. A **46** 4363 (1992).
- [39] R. J. Glauber, in *Frontiers in Quantum Optics*, E. R. Pike and S. Sarkar, Eds. Adam Hilger, Bristol and Philadelphia, (1987), 534.
- [40] J. P. Gordon, Phys. Rev. **161**, 367 (1967).
- [41] R. Graham, in *Quantum Optics, Proceedings of the Scottish University Summer School, 10th; Edinburg 1969*, edito da S. M. Kay and Maitland (Academic, New York, 1970), p.489.
- [42] H. Haug, Phys. Rep. **184**, 338 (1969).
- [43] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory* (Academic Press, New York, 1976).
- [44] S.-T. Ho and H. P. Yuen, Opt. Lett. **19**, 61 (1994).
- [45] A. S. Holevo, Probl. Inf. Transm. **9**, 177 (1973).
- [46] A. S. Holevo, *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, North-Holland, Amsterdam (1982).
- [47] J. R. Jeffers, N. Imoto, R. Loudon, Phys. Rev. A **47**, 3346 (1993).

- [48] J. Katriel and D. G. Hammer, *J. Phys. A* **14**, 1211 (1981).
- [49] S. E. Koonin and D. C. Meredith, *Computational Physics*, (Addison-Wesley, Redwood City, 1990).
- [50] M. Lax, W. H. Louisell, *Phys. Rep.* **185**, 568 (1969).
- [51] U. Leonhardt and H. Paul, *Phys. Rev. A* **48**, 4598 (1993).
- [52] J. A. Levenson, I. Abram, Th. Rivera, Ph. Grangier, *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 2233 (1993).
- [53] R. B. Levien, M. J. Collett, D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **47**, 5030 (1993).
- [54] G. Lindblad, *Commun. Math. Phys.* **48**, 119 (1976).
- [55] R. Loudon, *The quantum theory of light*, Clarendon Press, Oxford (1979).
- [56] R. Loudon, *IEEE J. Quant. Electr.* **QE-21**, 766 (1985).
- [57] R. Loudon and T. J. Shepherd, *Opt. Acta* **31**, 1143 (1984).
- [58] R. Loudon, M. Harris, T. J. Shepherd, J. M. Vaughan, *Phys. Rev. A* **48**, 681 (1993).
- [59] W. H. Louisell, *Quantum statistical properties of radiation*, Series in pure and applied optics, (Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1973).
- [60] L. A. Lugiato, F. Casagrande and L. Pizzuto, *Phys. Rev. A* **26** 3438 (1982).
- [61] L. A. Lugiato, M. O. Scully, H. Walther, *Phys. Rev. A* **36**, 740 (1987).
- [62] L. A. Lugiato, comunicazione privata.
- [63] K. Matsuo, *Phys. Rev. A* **47**, 3337 (1993).
- [64] A. Mecozzi, *Opt. Lett.* **13**, 295 (1988).
- [65] P. Meystre and M. Sargent III, *Elements of quantum optics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1991).
- [66] H. Risken, *The Fokker-Planck equation*, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [67] M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **25**, 79 (1984).

- [68] S. Ruiz-Moreno, J. Guitart, and M. J. Soneira in *Quantum Aspects of Optical Communications*, edito da C. Bendjaballah, O. Hirota and S. Reynaud, Lecture Notes in Physics **378** (Springer, Berlin, New York 1991), p. 376.
- [69] A. Schenzle, in *New Frontiers in Quantum Electrodynamics and Quantum Optics*, ed. da A. O. Barut, Nato ASI Series B **232**, (Plenum, New York and London 1990), p. 63.
- [70] J. M. Shapiro and S. R. Shepard, Phys. Rev. A **43**, 3795 (1991).
- [71] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani, Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993).
- [72] R. Tanaś, and T. Gantsog, Quant. Opt. **4**, 245 (1992).
- [73] Y. K. Wang and W. E. Lamb Jr., Phys. Rev. A **8** 866 (1973).
- [74] D. F. Walls, in *Quantum Optics, Proceedings of the Scottish University Summer School, 10th; Edinburg 1969*, edito da S. M. Kay and Maitland (Academic, New York, 1970), p.501.
- [75] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, Phys. Rev. Lett. **70** 548 (1993); Phys. Rev. A **49** 1350 (1994); Phys. Rev. A **47** 642 (1994).
- [76] H. M. Wiseman and G. J. Milburn, Phys. Rev. A **49** 4110 (1994).
- [77] W. K. Wootters, W. H. Zurek, Nature **229**, 802 (1982).
- [78] Y. Yamamoto, N. Imoto, S. Machida, Phys. Rev. A **33**, 3243 (1986).
- [79] Y. Yamamoto, T. Mukai, Opt. Quant. Electr. **21**, S1 (1989).
- [80] H. P. Yuen, Phys. Lett. A **51**, 1 (1975); Phys. Rev. A **13**, 2226 (1976).
- [81] H. P. Yuen, Phys. Lett. A **91**, 101 (1982).
- [82] H. P. Yuen, Phys. Rev. Lett. **56**, 2176 (1986).
- [83] H. P. Yuen, Phys. Lett. A **113**, 405 (1986).
- [84] H. P. Yuen, Opt. Lett. **12**, 789 (1987).

- [85] H. P. Yuen, in *Quantum Aspects of Optical Communications*, edito da C. Bendjaballah, O. Hirota and S. Reynaud, Lecture Notes in Physics **378** (Springer, Berlin, New York 1991), p. 333.
- [86] H. P. Yuen, in *The Workshop on Squeezed States and Uncertainty Relations* ed. by D.Han et al. (NASA Conf. Public. 3135, Washington DC, 1992), p.13.
- [87] H. P. Yuen, V. W. S. Chan, Opt. Lett. **8**, 177 (1983).
- [88] H.P. Yuen and M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. **70**, 363 (1993).
- [89] H. P. Yuen and J. H. Shapiro, IEEE Trans. Inf. Theory, **24** 657 (1978); **25** 179 (1979); **26** 78 (1980).
- [90] K. Zaheer and M. S. Zubairy, in *New Frontiers in Quantum Electrodynamics and Quantum Optics*, ed. da A. O. Barut, Nato ASI Series B **232**, (Plenum, New York and London 1990), p. 203.