

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

---

Facoltà di Scienze MM. FF. NN.  
Dipartimento di Fisica "A. Volta"

## Stime di stato quantistiche per insiemi covarianti

Relatore:

**Chiar.<sup>mo</sup> Prof. Giacomo Mauro D'Ariano**

Correlatore:

**Dott. Massimiliano Federico Sacchi**

Tesi di laurea di  
**Giulio Chiribella**

Anno Accademico 2002/2003

---



# Indice

<b>1</b>	<b>Cenni introduttivi di teoria della misura</b>	<b>8</b>
1.1	Alcune considerazioni su stati e misure . . . . .	8
1.2	Spazi di miscele e strutture convesse . . . . .	11
1.3	Modelli statistici . . . . .	14
1.4	Il modello statistico quantistico . . . . .	14
1.4.1	Lo spazio degli stati . . . . .	15
1.4.2	Le misurazioni . . . . .	16
1.5	Le POVM . . . . .	19
1.6	La misura nei postulati della meccanica quantistica . . . . .	21
1.6.1	Tre versioni del postulato sulla misura quantistica . . . . .	22
1.6.2	Equivalenze . . . . .	23
1.6.3	Alcune ulteriori osservazioni . . . . .	26
1.6.4	Riduzioni di stato nel caso generale: il concetto di strumento . . . . .	29
1.7	Realizzazione di misurazioni . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Teoria quantistica della stima</b>	<b>36</b>
2.1	Stime su famiglie parametriche di stati . . . . .	37
2.2	Misure covarianti . . . . .	39
2.2.1	Generalità sui gruppi di Lie . . . . .	39
2.2.2	Set covarianti di stati . . . . .	42
2.2.3	POVM covarianti . . . . .	44
2.2.4	Il problema della stima nel caso covariante . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Esempi di misure covarianti</b>	<b>50</b>
3.1	La misura della fase . . . . .	50
3.1.1	La fase di un oscillatore armonico . . . . .	50
3.1.2	La misura di fase ottimale per un oscillatore armonico . . . . .	53
3.1.3	Definizione generale di fase . . . . .	60
3.1.4	La misura di fase ottimale nel caso generale . . . . .	62
3.1.5	Misure di fase su copie multiple . . . . .	65

3.2	Stime covarianti per i gruppi $SU(d)$ . . . . .	70
3.2.1	Definizione . . . . .	70
3.2.2	Stime covarianti universali . . . . .	70
3.2.3	Stime covarianti su copie multiple di stati puri . . . . .	72
3.2.4	Stime covarianti su stati generici . . . . .	75
3.2.5	Stime con rappresentazioni coniugate . . . . .	79
3.2.6	Un altro approccio alla stima universale . . . . .	82
3.3	Generalizzazione dei risultati precedenti . . . . .	87
3.4	Misure covarianti per la rappresentazione di Weyl-Heisenberg .	92
3.4.1	Generalità . . . . .	92
3.4.2	Misure covarianti su $\mathcal{H}$ . . . . .	94
3.4.3	Misure su copie multiple . . . . .	96
3.4.4	Misure con rappresentazioni coniugate . . . . .	98

# Introduzione

Una problematica cruciale nella descrizione del mondo fisico fornita dalla Meccanica Quantistica è senz'altro quella legata al processo di misurazione: quest'ultimo possiede infatti a livello di principi uno statuto del tutto particolare, responsabile di gran parte degli aspetti più originali e, da un certo punto di vista, sconcertanti dell'intera teoria.

Basti citare, a questo proposito, l'effetto drastico della misura sull'evoluzione degli stati quantistici, noto come *collasso della funzione d'onda*, evidenziato per esempio dal celebre “esperimento delle due fenditure”, o anche la tipica non località delle misure su sistemi composti che sta all'origine del cosiddetto “paradosso EPR”.

Come è noto, nella tradizionale formulazione della Meccanica Quantistica, ad ogni grandezza fisica relativa ad un certo sistema viene fatta corrispondere un'*osservabile*, cioè un operatore autoaggiunto su un opportuno spazio di Hilbert degli stati: dati uno stato e un'osservabile, tutti gli aspetti del corrispondente processo di misura sono specificati da poche semplici prescrizioni, riguardanti da una parte la statistica dei possibili risultati, e dall'altra lo stato del sistema a misurazione avvenuta.

La pratica di laboratorio mostra tuttavia che la realtà è molto più variegata di quanto, a prima vista, non appaia dai tradizionali postulati: si possono infatti considerare degli esperimenti concreti in cui vengono misurati dei parametri non riconducibili in maniera diretta a nessuna osservabile ordinaria. Misure di questo tipo, come quella della fase della radiazione elettromagnetica, o quella dei tempi di percorrenza di un certo cammino ottico da parte di un fascio laser, sono piuttosto comuni nell'ambito dell'interferometria.

Nello sviluppo della riflessione sul problema della misura, l'esigenza di descrivere quantisticamente anche questo genere di situazioni ha portato ad estendere la classe delle misurazioni, introducendo così i concetti di *POVM* e *strumento* in luogo di quello, piuttosto restrittivo, di osservabile.

A questo proposito si parla quindi di “misurazioni generalizzate”: esse corrispondono, in pratica, a tutte quelle applicazioni che mandano uno stato nella distribuzione di probabilità dei risultati di un possibile esperimento.

Una situazione di particolare interesse, in cui tipicamente è necessario il ricorso a misure generalizzate, si ha nel caso in cui lo stato del sistema soggetto a misura risulti da un processo di preparazione dipendente da alcuni parametri variabili a discrezione dello sperimentatore: in questi casi si può provare ad escogitare una misura che permetta di stimare, dallo stato di output del sistema, i parametri del processo di preparazione.

Definito poi un certo criterio di merito, è anche possibile individuare quali, fra tutte le misure possibili, siano quelle migliori: questo può essere fatto con l'ausilio della *teoria quantistica della stima*.

Tanto per fare un esempio, se si considera un fascio di luce laser al termine di un certo cammino ottico, si ha che, variando la lunghezza di tale cammino, è possibile modificare lo stato del sistema: in tal caso, la stima del parametro di preparazione può essere interpretata come una misura di lunghezza, di tempo di percorrenza, o anche di indice di rifrazione.

Nel caso in cui le variazioni del parametro considerato risultino dall'azione sul sistema di un certo gruppo di trasformazioni (come avviene, per esempio, nel caso di traslazioni spaziali) si parla di *insiemi covarianti* di stati: su insiemi di questo genere è possibile ricondurre la stima di parametro alla stima della trasformazione subita da un certo stato di partenza.

Vista la possibilità di disporre in laboratorio di più copie del sistema in esame, diventa poi interessante analizzare i vari schemi che corrispondono a misure su copie multiple: in particolare, ci si aspetta che esistano delle misure “collettive” (fatte cioè su tutte le copie contemporaneamente) che permettano di stimare il parametro in questione con una maggiore efficienza rispetto a quanto non sia possibile fare ripetendo banalmente la stessa misura su ogni singola copia e mediando sui risultati ottenuti.

Un miglioramento di questo tipo potrebbe essere dovuto, per esempio, all'uso di un apparato di misura che preveda entanglement.

Il presente lavoro di tesi è volto a condurre un'analisi dettagliata degli schemi di misura su insiemi covarianti: ciò verrà fatto ricavando innanzitutto, in una serie di casi notevoli, la forma esplicita delle misure ottimali secondo criteri opportuni. Sarà così possibile evidenziare quali miglioramenti siano associati ad un certo schema di misura e anche quale sia l'origine di tali miglioramenti.

In particolare, partendo dallo studio delle caratteristiche della misura su copie identiche (relativamente alla quale si possono trovare alcune interessanti osservazioni in [1, 2, 3]), si arriverà a proporre degli schemi ad essa alternativi.

Per gruppi compatti verrà poi dimostrato un risultato generale che permette

di individuare esplicitamente le misure ottimali per il criterio della massima verosimiglianza: introducendo una generalizzazione dei vettori di Susskind e Glogower per la rappresentazione della fase [4], sarà possibile scrivere tali misure in una forma particolarmente semplice.

In quanto segue viene fornito un breve prospetto circa il contenuto della tesi.

Il **primo capitolo** è dedicato all'introduzione delle misure generalizzate, del loro significato, e del formalismo teorico utile alla loro descrizione.

In primo luogo viene presentata, sulla base di considerazioni generali sui modelli statistici, l'estensione della classe delle misurazioni quantistiche, identificando così nelle POVM (cioè nelle risoluzioni dell'identità ad operatori positivi) l'oggetto matematico più idoneo per la descrizione della statistica di una misura.

Successivamente è dato spazio ad una breve discussione sulla riduzione di stato associata a misure generalizzate, discussione che porta, in definitiva, all'introduzione del concetto di strumento.

In chiusura viene poi fatto un accenno al problema della realizzabilità delle misure e al teorema di Naimark sulle estensioni proiettive.

Nel **secondo capitolo** è presentata la teoria quantistica della stima, grazie alla quale si può fornire una definizione matematicamente precisa di cosa si intenda per "misure ottimali" secondo un certo "criterio di merito".

Particolare enfasi è data alla forma assunta dal problema di stima nel caso di insiemi di stati covarianti per qualche gruppo di Lie.

Nel **terzo capitolo** vengono prese in considerazione alcune tipologie notevoli di stime covarianti, corrispondenti al gruppo della fase, ai gruppi  $SU(d)$  e al gruppo delle traslazioni in due dimensioni.

L'interesse per questi casi particolari deriva da diverse ragioni: nel primo caso, per esempio, è già stato osservato come una misura di fase possa essere pensata anche come una misura ottica di lunghezza, particolarmente importante in interferometria.

Nel secondo caso, invece, su spazi di Hilbert di dimensione  $d$ , le misure considerate danno risultati in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli stati del sistema: tale circostanza può essere interessante sia da un punto di vista di teoria dell'informazione che di crittografia quantistica.

Per quanto riguarda le traslazioni bidimensionali, infine, si ha che, grazie alla rappresentazione di Weyl-Heisenberg, queste possono essere interpretate come shift dei valori medi delle distribuzioni di posizione e momento relative

ad un certo stato: le corrispondenti misure covarianti possono quindi essere pensate come misure congiunte di posizione e momento.

Per ogni tipo di covarianza considerato verranno presentati e confrontati fra loro diversi schemi di misura, evidenziando, in definitiva, come l'immersione della varietà dei parametri da stimare in uno spazio di Hilbert di dimensione maggiore di quello di partenza (quale è quello che si ha, per esempio, quando si dispone di più copie di un certo sistema) possa essere sfruttata per migliorare la qualità delle misure.

Come già osservato, tale affermazione verrà anche motivata, nel caso di gruppi compatti, da considerazioni generali sulle misure ottimali.

# Capitolo 1

## Cenni introduttivi di teoria della misura

Nel presente capitolo viene delineato, in maniera essenziale, il quadro teorico in cui si ambienta il lavoro di tesi.

Il concetto fondamentale di *POVM* (positive operator valued measure) viene introdotto partendo dalle caratteristiche strutturali di un generico modello statistico e specializzando il discorso al caso particolare della meccanica quantistica.

Ciò permette in maniera naturale di mettere in risalto le POVM come l'oggetto matematico più generale atto a descrivere la statistica dei risultati di una misurazione quantistica.

Viene poi dato un accenno all'inquadramento assiomatico della misura nella formulazione standard della meccanica quantistica, seguito da alcuni teoremi di caratterizzazione, da esempi illustrativi e da alcune considerazioni circa la riduzione di stato nel caso di misure generalizzate, che portano direttamente alla definizione di *strumento*.

### 1.1 Alcune considerazioni su stati e misure

Ogni generica situazione sperimentale è, in ultima analisi, schematizzabile nel modo seguente: prima della misura il sistema si trova in una certa *condizione iniziale* (tipicamente, risultante da un opportuno processo di *preparazione*), successivamente esso interagisce con un apparato misuratore il quale alla fine fornisce, con una certa probabilità, uno dei possibili risultati della misura<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Quest'ultima affermazione assume implicitamente la validità del cosiddetto *postulato statistico*: sebbene, fissate le condizioni iniziali, i singoli risultati ottenuti in una sequenza

Matematicamente<sup>2</sup>, per poter definire una distribuzione di probabilità nell'insieme  $U$  dei possibili risultati, è necessario che questo costituisca uno spazio misurabile (le distribuzioni di probabilità, in definitiva, sono delle misure su  $U$  normalizzate a 1).

Di conseguenza, come tutti gli insiemi misurabili,  $U$  sarà dotato della  $\sigma$ -algebra dei suoi sottinsiemi misurabili  $\mathcal{A}(U)$ , a ciascuno dei quali corrisponde uno dei possibili *eventi*.

Per esempio, nel caso in cui i possibili risultati di una misura corrispondono ai valori assunti da una qualche grandezza fisica  $\mathcal{G}$ , l'insieme  $U$  sarà un sottinsieme misurabile di  $\mathbb{R}^N$ , provvisto della  $\sigma$ -algebra degli aperti di  $\mathbb{R}^N$  in esso inclusi, dove ogni aperto  $B$  rappresenta l'evento "il valore di  $\mathcal{G}$  misurato

---

di realizzazioni identiche e indipendenti dello stesso esperimento possano essere diversi, la frequenza con cui ciascun risultato si presenta tende a diventare stabile di sequenze infinitamente lunghe.

<sup>2</sup>Per completezza, qui di seguito è elencata una catena di definizioni che precisano i termini del discorso:

1. Dato un insieme  $U$ , si dice *algebra* un insieme  $\mathcal{A}(U)$  di sottinsiemi di  $U$  tale che:
  - $\emptyset \in \mathcal{A}(U)$
  - $\forall B \in \mathcal{A}(U) \quad U - B \in \mathcal{A}(U)$ .
  - $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{A}(U) \quad B_1 \cup B_2 \in \mathcal{A}(U)$ .
2. Un'algebra si dice  *$\sigma$ -algebra* se è chiusa rispetto all'unione numerabile di suoi elementi.
3. Un insieme  $U$  dotato di una  $\sigma$ -algebra si dice *spazio misurabile*.
4. Una funzione  $\mu$ , definita dalla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}(U)$  di uno spazio misurabile  $U$  nell'insieme dei numeri reali, è detta *misura* se
  - $\mu(B) \geq 0 \quad \forall B \in \mathcal{A}(U)$
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - $\forall$  set numerabile  $\{B_i\} \subset \mathcal{A}(U)$ , con  $B_i \cap B_j = \emptyset$ , vale:

$$\mu\left(\sum_i B_i\right) = \sum_i \mu(B_i) .$$

5. Uno spazio misurabile dotato di una misura  $\mu$  si dice *spazio misurale*.
6. Uno spazio misurale si dice  *$\sigma$ -finito* se per ogni  $B$  dell'algebra  $\mu(B) < \infty$ .
7. Si dice *misura di probabilità* (o anche, secondo una terminologia più fisica, *distribuzione di probabilità*) una misura  $\mu$  su uno spazio misurale  $\sigma$ -finito  $U$  tale che  $\mu(U) = 1$ .

Per una trattazione completa si rimanda a [5].

nell'esperimento si trova in  $B$ ".

In sostanza, il risultato di un esperimento è descrivibile come la realizzazione di una variabile casuale  $u$  a valori in  $U$ .

Indicati con  $\tilde{S}$  la condizione iniziale, con  $\mu_{\tilde{S}}(du)$  la corrispondente distribuzione di probabilità in  $u$  e con  $B$  un qualunque sottinsieme misurabile di  $U$ , vale

$$\mu_{\tilde{S}}(B) = Pr\{u \in B \mid \tilde{S}\}, \quad (1.1)$$

cioè  $\mu_{\tilde{S}}(B)$  è la probabilità condizionata che il risultato  $u$  della misura giaccia in  $B$  data la condizione iniziale  $\tilde{S}$ .

Bisogna osservare che la corrispondenza fra condizioni iniziali e risultati degli esperimenti non è necessariamente biunivoca: a due diverse condizioni iniziali possono corrispondere distribuzioni di probabilità uguali per ogni possibile misura.

Definiamo allora *stati* del sistema le classi di equivalenza ottenute raggruppando nella stessa classe tutte le condizioni iniziali che, per ogni possibile misura, danno luogo alla stessa distribuzione di probabilità:

$$[S] = \{\tilde{S}' \mid \mu_{\tilde{S}'}(du) = \mu_{\tilde{S}}(du) \text{ per ogni possibile misura}\}$$

(questa definizione comporta che le distribuzioni  $\mu(du)$  possano essere considerate come funzioni  $\mu_{[S]}(du)$  delle classi di equivalenza; per semplicità di notazione, inoltre, scriveremo d'ora in poi soltanto  $S$  in luogo di  $[S]$ ).

Per come è definito, dunque, lo *stato* diventa quell'elemento della descrizione in cui sono contenute tutte e sole le informazioni sul sistema accessibili all'atto della misurazione.

È interessante notare come, una volta specificate le possibili condizioni iniziali, la struttura dell'insieme degli stati dipende da quali siano le misure ritenute "possibili"<sup>3</sup>.

In ogni caso, tutti gli insiemi degli stati hanno in comune una particolare struttura, evidenziata in quanto segue.

Dato un set finito di stati  $\{S_i\}$  e fatta corrispondere a ciascuno stato una probabilità  $p_i$ , si può sempre immaginare una situazione sperimentale in cui il sistema soggetto a misurazione è descritto, con probabilità  $p_i$ , dall' $i$ -esimo stato del set (in pratica basta fare in modo che la statistica dell'esperimento

---

<sup>3</sup>Questa osservazione gioca un importante ruolo nel passaggio dal classico al quantistico che si può avere quando si studiano dei modelli a variabili nascoste: la restrizione dell'insieme delle possibili misure porta a far coincidere nello stesso stato quantistico più stati classicamente distinguibili (a questo proposito si veda [6]).

venga fatta su un grande numero di copie del sistema in modo tale che la frazione di copie descritte dallo stato  $S_i$  approssimi  $p_i$ .

Il procedimento delineato corrisponde ad un particolare tipo di preparazione delle condizioni iniziali del sistema detto *mixing* e, poiché tali condizioni iniziali sono del tutto legittime, bisogna concludere che anche ad esse è associato uno stato del sistema, detto *stato miscela*, che possiamo indicare con  $S$ .

In questo caso, la regola delle probabilità totali fornisce:

$$\mu_S(B) = \sum_i p_i \mu_{S_i}(B) \quad \forall B \in \mathcal{A}(U) , \quad (1.2)$$

È quindi chiaro che, tramite la costruzione descritta, ogni set di stati e probabilità  $\{S_i, p_i\}$  può essere messo in corrispondenza con altro stato  $S$ .

Questa caratteristica conferisce all'insieme degli stati una particolare struttura matematica, detta di *spazio di miscele* (mixture space): spazi di questo tipo godono di alcune notevoli proprietà, esaminate nella seguente sezione.

## 1.2 Spazi di miscele e strutture convesse

**Definizione 1.2.1** *Si dice spazio di miscele un insieme  $\mathcal{S}$  in cui è definita una legge che associa un elemento di  $\mathcal{S}$  ad ogni set finito di coppie  $\{S_i, p_i\}$  dove  $\{p_i\}$  sono delle probabilità ed  $\{S_i\}$  degli elementi di  $\mathcal{S}$ .*

In virtù di questa definizione, uno stato miscela verrà talvolta indicato direttamente col set  $\{S_i, p_i\}$ .

Un esempio di spazio di miscele è l'intervallo  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$  con la regola di miscela

$$\{x_i, p_i\} \rightarrow x = \sum_i p_i x_i .$$

**Definizione 1.2.2** *Una mappa  $T$  da uno spazio di miscele  $\mathcal{S}$  in uno spazio vettoriale  $V$  si dice affine se*

$$T(\{S_i, p_i\}) = \sum_i p_i T(S_i) . \quad (1.3)$$

Un esempio di mappa affine è la mappa che associa ad ogni elemento di  $\mathcal{S}$  un vettore fissato  $\mathbf{v}$  di  $V$  (si può quindi osservare che l'insieme delle mappe affini non è mai vuoto).

Una mappa affine in cui lo spazio vettoriale di arrivo è un campo  $\mathbb{K}$  (tipicamente  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) è detta *funzionale affine*.

**Definizione 1.2.3** *Uno spazio di miscele  $\mathcal{S}$  si dice separabile se, dati due elementi  $S_1$  e  $S_2$  appartenenti ad  $\mathcal{S}$  con  $S_1 \neq S_2$ , esiste sempre un funzionale affine  $\varphi$  che li distingue, cioè t.c.  $\varphi(S_1) \neq \varphi(S_2)$ .*

Lo spazio degli stati di un sistema, per come è stato introdotto precedentemente (cioè quotizzando rispetto a tutte le possibili misure), costituisce un ottimo esempio di spazio di miscele separabile.

Infatti, dati due stati diversi  $S_1$  e  $S_2$ , deve per forza esserci una misura che li distingue, cioè tale che, almeno per un evento  $B \in \mathcal{A}(U)$ , si abbiano differenti probabilità  $\mu_{S_1}(B) \neq \mu_{S_2}(B)$ , ma  $\mu_S(B)$  è un funzionale affine di  $S$  in virtù di (1.2), quindi lo spazio è separabile.

Gli spazi di miscele separabili godono di una significativa proprietà espressa da un teorema il cui enunciato necessita l'introduzione di qualche definizione a proposito delle strutture convesse:

**Definizione 1.2.4** *Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Dato un set finito di coppie  $\{\mathbf{v}_i, p_i\}$  con  $\mathbf{v}_i \in V$  e*

$$p_i \geq 0 \quad \forall i, \quad \sum_i p_i = 1,$$

*il vettore*

$$\mathbf{v} = \sum_i p_i \mathbf{v}_i$$

*si dice combinazione convessa dei  $\{\mathbf{v}_i\}$  con pesi  $\{p_i\}$ .*

**Definizione 1.2.5** *Un sottinsieme  $C$  di uno spazio vettoriale  $V$  si dice convesso se è chiuso rispetto alla combinazione convessa, cioè se qualsiasi combinazione convessa di elementi di  $C$  costituisce a sua volta un elemento di  $C$ .*

Un esempio di insieme convesso è il semplice  $n$ -dimensionale, cioè l'insieme che si ottiene prendendo  $n + 1$  vettori, di cui  $n$  linearmente indipendenti, in uno spazio di dimensione  $d$  con  $d \geq n$  e formando tutte le possibili combinazioni convesse (per esempio con  $n = 2$  si ha il triangolo, mentre con  $n = 3$  si ha il tetraedro).

**Definizione 1.2.6** *Sia  $C$  un convesso e  $\mathbf{v}$  un punto di  $C$ .*

*Il punto  $\mathbf{v}$  si dice estremale se non esistono in  $C$  due punti  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  distinti da  $\mathbf{v}$  tali che  $\mathbf{v}$  sia una loro combinazione convessa.*

Per esempio, il semplice n-dimensionale ha come punti estremali i suoi  $n + 1$  vertici.

Come si può notare, ogni insieme convesso costituisce uno spazio di miscele separabile dove la regola di miscela è data dalla combinazione convessa. In un certo senso, però, vale anche il risultato inverso:

**Teorema 1.2.1** *Ogni spazio di miscele separabile  $\mathcal{S}$  può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottinsieme convesso di uno spazio vettoriale  $V$  mediante una mappa affine.*

**Dim.** L'insieme dei funzionali reali affini definiti su  $\mathcal{S}$  è uno spazio vettoriale e come tale ammette spazio vettoriale duale  $\tilde{\mathcal{S}}$ .

Ad ogni stato  $S$  si può associare un elemento  $\tilde{S}$  di  $\tilde{\mathcal{S}}$  tramite la relazione:

$$\tilde{S}(\varphi) = \varphi(S) \quad \text{per ogni funzionale affine } \varphi. \quad (1.4)$$

La corrispondenza istituita da (1.4) è biunivoca: infatti, se  $\tilde{S}_1 = \tilde{S}_2$  allora  $\varphi(S_1) = \varphi(S_2) \forall \varphi$ , il che significa che  $S_1 = S_2$ , visto che lo spazio è separabile nel senso della def.1.2.3.

Inoltre la mappa che manda  $S$  in  $\tilde{S}$  è affine:  $S = \{S_i, p_i\}$  viene mappato in  $\tilde{S}$  tale che

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\varphi) &= \varphi(S) \\ &= \sum_i p_i \varphi(S_i) \\ &= \sum_i p_i \tilde{S}_i(\varphi) \quad \forall \text{ funzionale affine } \varphi. \end{aligned}$$

Ciò equivale a dire  $\tilde{S} = \sum_i p_i \tilde{S}_i$ . ■

Lo spazio degli stati di un qualsiasi sistema fisico può quindi essere rappresentato fedelmente da un insieme convesso, col vantaggio che le combinazioni convesse sono molto più maneggevoli delle miscele  $\{S_i, p_i\}$  e che le strutture convesse godono di molte utili proprietà (come, ad esempio, il fatto che un funzionale affine definito su un convesso assume sempre massimo -o minimo- in un punto estremale).

Per un quadro completo sulla convessità si rimanda a [7, 8].

### 1.3 Modelli statistici

Arrivati a questo punto, è naturale formulare una definizione assiomatica di modello statistico che riassume in sé le caratteristiche essenziali della relazione fra stati e misure evidenziate nelle precedenti sezioni.

**Definizione 1.3.1** *Si definisce modello statistico una coppia  $(\mathcal{S}, \mathcal{M})$  dove  $\mathcal{S}$  è un insieme convesso ed  $\mathcal{M}$  è un insieme di mappe affini  $\mu$  delle quali ciascuna è definita da  $\mathcal{S}$  nel convesso delle distribuzioni di probabilità relative ad una qualche variabile aleatoria  $u_\mu$ .*

Gli elementi di  $\mathcal{S}$  si dicono *stati del sistema* mentre quelli di  $\mathcal{M}$  si dicono *misurazioni*; la variabile aleatoria  $u_\mu$  a cui ciascuna misurazione  $\mu$  fa riferimento descrive invece i possibili risultati sperimentali: il suo spettro  $U_\mu$  è proprio l'insieme di tali risultati.

Come visto precedentemente, dato un sottinsieme misurabile  $B$  di  $U_\mu$  (cioè un insieme di possibili risultati), se il sistema si trova nello stato  $S$ , la quantità  $\mu_S(B)$  va interpretata come probabilità che il risultato  $u_\mu$  della misura giaccia in  $B$ .

Grazie alla def.(1.3.1), la condizione (1.2) è automaticamente soddisfatta per ogni miscela  $S = \sum_i p_i S_i$ :

$$\mu_S(B) = \sum_i p_i \mu_{S_i}(B) \quad \forall B \in \mathcal{A}(U_\mu) . \quad (1.5)$$

Se l'insieme dei possibili risultati  $U_\mu$  è *discreto* ( $U_\mu = \{u_i\}$ ), allora si può anche definire la probabilità di ottenere il risultato  $u_i$ , indicata con  $\mu_S(u_i)$ .

In questo caso deve valere:

$$\mu_S(u_i) \geq 0 \quad \forall u_i \in U_\mu, \quad \forall S \in \mathcal{S} \quad (1.6)$$

$$\sum_{u_i \in U} \mu_S(u_i) = 1 \quad \forall S \in \mathcal{S} , \quad (1.7)$$

e anche:

$$\mu_S(B) = \sum_{u_i \in B} \mu_S(u_i) \quad \forall B \in \mathcal{A}(U_\mu) . \quad (1.8)$$

### 1.4 Il modello statistico quantistico

Il discorso sui modelli statistici, finora affrontato in maniera astratta, verrà specializzato in questa sezione al caso particolare della meccanica quantistica.

Lo scopo primario di questa sezione è quello di arrivare a riconoscere nelle POVM gli oggetti matematici che traducono nel formalismo quantistico quelle che in un generico modello statistico sono le *misurazioni*.

Per semplicità di esposizione, in quanto segue faremo riferimento a sistemi quantistici descritti in spazi di Hilbert di dimensione finita, tuttavia, a parte le complicazioni matematiche che si vengono a creare nelle dimostrazioni, tutti i risultati esposti valgono anche in dimensione infinita.

### 1.4.1 Lo spazio degli stati

Sia dunque  $\mathcal{H}$  lo spazio di Hilbert opportuno per la descrizione del sistema e sia  $d = \dim\mathcal{H}$ .

Come è noto, se il sistema è in uno stato definito (cioè *puro*), allora tale stato è descritto da un vettore normalizzato  $|\psi\rangle$  appartenente a  $\mathcal{H}$  (o meglio, dalla classe di equivalenza di vettori che differiscono da  $|\psi\rangle$  soltanto per una fase globale).

Se il sistema non è in uno stato definito, allora si trova in uno *stato miscela*  $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$ .

L'insieme ottenuto considerando sia gli stati puri che le miscele quantistiche e quotizzando rispetto a tutte le possibili misure (cioè raggruppando in una stessa classe di equivalenza tutti gli stati fra loro indistinguibili sperimentalmente) costituisce l'*insieme degli stati del modello quantistico*<sup>4</sup>.

In accordo con il teorema (1.2.1), l'insieme degli stati è rappresentabile mediante un convesso: questo è esattamente quello che avviene quando si passa alla descrizione con *matrici densità*, trattata per esteso in [9].

In questo formalismo, infatti, gli stati del sistema sono descritti da elementi dello spazio  $\mathcal{S}$  delle matrici  $d \times d$  hermitiane che soddisfano:

$$\rho \geq 0, \quad \text{Tr}[\rho] = 1 \quad (1.9)$$

e tale insieme è evidentemente un convesso (le condizioni 1.9 sono soddisfatte anche da combinazioni convesse di matrici densità).

È importante notare che, in virtù del teorema spettrale in dimensione finita,

---

<sup>4</sup>In quanto segue, il quoziente verrà fatto rispetto alle misure tramite operatori autoaggiunti della meccanica quantistica ordinaria, cioè identificando nella stessa classe di equivalenza tutti gli stati che danno gli stessi valori medi per ogni operatore autoaggiunto. Questo non è in contrasto con l'allargamento della classe delle misurazioni che verrà fatto successivamente: significa soltanto che tale allargamento di  $\mathcal{M}$  avverrà a *spazio degli stati fissato*, e quindi che nemmeno le nuove misure introdotte saranno in grado di distinguere stati ordinariamente indistinguibili (come, per esempio, stati che differiscono per una fase globale o ensemble equivalenti).

è possibile scrivere ogni matrice densità  $\rho$  sulla base dei suoi autovettori:

$$\rho = \sum_{i=1}^d p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| . \quad (1.10)$$

Questo significa che i punti estremali del convesso degli stati sono tutti e soli i proiettori unidimensionali su  $\mathcal{H}$ , i quali corrispondono agli stati puri.

### 1.4.2 Le misurazioni

Una volta precisato il convesso degli stati del sistema, per completare il modello statistico è necessario specificare quali siano le mappe affini che corrispondono alle misurazioni.

A questo proposito, come ben noto (cfr. [10]), la prescrizione “di Copenhagen” è:

- ogni grandezza fisica osservabile  $\mathcal{G}$  è descritta da un operatore autoaggiunto  $G$
- i valori possibili della grandezza  $\mathcal{G}$  sono gli autovalori  $\{g_i\}$  di  $G$
- le probabilità  $\mu_\rho(g_i)$  dei vari risultati si calcolano a partire dalla risoluzione spettrale di  $G$  secondo la regola:

$$\mu_\rho(g_i) = \text{Tr}[\rho P_i] , \quad (1.11)$$

dove  $P_i$  è il proiettore sull'autospazio corrispondente all' $i$ -esimo autovalore.

La risoluzione spettrale  $\{P_i\}$  di  $G$  è tale che:

$$\begin{cases} P_i P_j &= \delta_{ij} P_i & \forall i, j \\ \sum_i P_i &= \mathbb{I} . \end{cases} \quad (1.12)$$

Si può osservare come tutto ciò concordi con la definizione astratta di misurazione in un modello statistico: la mappa  $\mu$  che manda  $\rho$  nella distribuzione di probabilità dei possibili risultati  $\{g_i\}$  della misura, per come è definita dalla (1.11), è lineare in  $\rho$  (e quindi affine).

È tuttavia legittimo chiedersi<sup>5</sup> se questa sia veramente la forma più generale di una misurazione quantistica.

---

<sup>5</sup>I primi contributi essenziali a questo proposito sono stati quelli di [11, 12, 13].

Nel caso semplice di variabili casuali che possiedono un insieme finito  $U$  di risultati possibili vale la seguente caratterizzazione (per la dimostrazione si può vedere [6]):

**Teorema 1.4.1** *Ogni mappa affine definita da  $\mathcal{S}$  nel convesso delle distribuzioni di probabilità sull'insieme finito  $U = \{u_i\}$  è in corrispondenza biunivoca con una risoluzione finita dell'identità, cioè con un set finito  $\{E_u\}$  di matrici hermitiane che soddisfano:*

$$E_u \geq 0, \quad \sum_{u \in U} E_u = \mathbb{I}. \quad (1.13)$$

Tale corrispondenza è indotta dalla relazione:

$$\mu_\rho(u) = \text{Tr}[E_u \rho] \quad \forall u \in U. \quad (1.14)$$

Il teorema 1.4.1 mostra che ogni generica mappa affine (potenziale candidata al ruolo di “misurazione”) che abbia  $U$  finito può essere descritta da una risoluzione finita dell'identità.

Le risoluzioni a proiettori ortogonali, di cui si parlava prima, costituiscono solo una sottoclasse particolarissima dell'insieme delle risoluzioni finite e, in linea di principio, non si vede perché limitare l'insieme delle misure quantistiche a quelle particolari descritte per mezzo di questa sottoclasse.

Se assumiamo che *tutte* le mappe affini che mandano uno stato in una distribuzione di probabilità corrispondano a misurazioni quantistiche “legittime”<sup>6</sup>, siamo costretti a prendere in considerazione l'intero insieme delle risoluzioni finite dell'identità.

Non solo: poiché esistono anche misure in cui lo spazio dei possibili risultati non è finito, diventa necessaria l'introduzione di una definizione generale di risoluzione dell'identità nella quale le risoluzioni finite possano rientrare come caso particolare.

**Definizione 1.4.1** *Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e sia  $U$  un insieme misurabile corredato della  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}(U)$  dei suoi sottinsiemi misurabili.*

*Si dice risoluzione dell'identità una famiglia di operatori autoaggiunti  $\{E(B) / \forall B \in \mathcal{A}(U)\}$  tale che:*

---

<sup>6</sup>“Legittime”, si intende, a livello di principi: non stiamo prendendo in esame la *realizzabilità sperimentale* delle misure, nè il set up concreto necessario per il procedimento di misura.

Quello di stabilire quali siano le misure effettivamente realizzabili è un problema molto complesso, che va discusso caso per caso.

Un breve accenno a questo genere di problematiche verrà dato, al termine del capitolo, nella sezione 1.7.

$$1. E(B) \geq 0 \quad \forall B \in \mathcal{A}(U)$$

$$2. E(U) = \mathbb{I}$$

3. Per ogni set numerabile  $\{B_i\}$  di elementi di  $\mathcal{A}(U)$  tra loro disgiunti (cioè tali che  $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ ) vale

$$E(\cup_i B_i) = \sum_i E(B_i) .$$

Grazie a questa definizione, è possibile dare (si veda [6]) la generalizzazione del teorema 1.4.1, in modo da caratterizzare *tutte* le possibili misurazioni.

**Teorema 1.4.2** *Ogni mappa affine  $\mu$  che manda stati quantistici  $\rho$  in distribuzioni di probabilità su un certo insieme misurabile  $U$  è in corrispondenza biunivoca con una risoluzione dell'identità  $\{E(B)/B \in \mathcal{A}(U)\}$ .*

*La corrispondenza è indotta dalla relazione*

$$\mu_\rho(B) = \text{Tr}[\rho E(B)] \quad \forall \rho \in \mathcal{S} . \quad (1.15)$$

L'estensione, a  $\mathcal{S}$  fissato, dell'insieme delle misurazioni  $\mathcal{M}$  ottenuta in questa maniera comporta quindi l'introduzione di una classe di misure molto più ricca di quella prevista da una formulazione della meccanica quantistica strettamente ortodossa.

Prima di chiudere questa sezione è il caso di ricordare che, come anticipato all'inizio, tutti i risultati sopra enunciati valgono anche in dimensione infinita: in tal caso lo spazio degli stati è l'insieme  $\mathcal{S} \subset \mathbb{T}_+(\mathcal{H})$  degli operatori positivi di classe traccia<sup>7</sup> con traccia normalizzata ad 1. Nell'uso comune, gli elementi di  $\mathcal{S}$  vengono detti ancora "matrici densità".

In sintesi, il modello statistico quantistico può essere riassunto in questo modo:

- l'insieme  $\mathcal{S}$  degli stati è il convesso delle matrici densità su un opportuno spazio di Hilbert

---

<sup>7</sup>Un operatore  $O$  si dice *di classe traccia* se, presa una qualsiasi base ortonormale  $\{|n\rangle\}$  di  $\mathcal{H}$ , la serie  $\text{Tr}[O] \doteq \sum_n \langle n|O|n\rangle$  converge incondizionatamente.

Gli operatori di classe traccia sono un caso particolare di operatori di Hilbert-Schmidt (cioè di quegli operatori  $O$  tali che  $\text{Tr}[O^\dagger O] < \infty$ ) per i quali si può trovare in [14] un'ampia trattazione.

- l'insieme  $\mathcal{M}$  delle misurazioni contiene tutte le possibili mappe affini che mandano stati in distribuzioni di probabilità
- ciascuna misurazione è rappresentata da una risoluzione dell'identità.

## 1.5 Le POVM

**Definizione 1.5.1** [12, 13] *Si definisce POVM (positive operator valued measure<sup>8</sup>) una mappa  $E$ , definita sulla  $\sigma$ -algebra degli eventi  $\mathcal{A}(U)$ , che manda ogni evento  $B$  in un operatore positivo  $E(B)$  in modo che  $\{E(B)/B \in \mathcal{A}(U)\}$  sia una risoluzione dell'identità.*

Per quanto detto finora, dovrebbe essere già chiaro il modo in cui le POVM intervengono nella descrizione delle misure quantistiche: ad ogni evento  $B \in \mathcal{A}(U)$  è associato un elemento  $E(B)$  e, se il sistema è nello stato  $\rho$ , allora la probabilità  $\mu_\rho(B)$  è esprimibile come  $\text{Tr}[\rho E(B)]$ .

Per mettere in luce la varietà di misurazioni che questo strumento matematico consente di descrivere può essere utile un confronto con le ordinarie misure proiettive<sup>9</sup>.

Si può innanzitutto osservare che, a differenza dell'insieme delle misure proiettive della formulazione ortodossa, l'insieme delle POVM è un insieme *convesso* (come del resto lo era la classe estesa  $\mathcal{M}$  delle misurazioni del modello statistico quantistico).

Questa differenza, per quanto a prima vista possa sembrare un po' astratta, ha in realtà un significato fisico molto diretto: un semplice esempio sarà sufficiente ad illustrarlo.

### Esempio (misure randomizzate)

Consideriamo lo spazio di Hilbert bidimensionale  $\mathcal{H}$  associato ad una particella di spin 1/2 (tralasciamo la parte relativa ai gradi di libertà spaziali): qualsiasi matrice hermitiana  $G$  avrà uno o, al più, due autovalori, quindi qualsiasi misura ordinaria non potrà avere più di due possibili risultati.

<sup>8</sup>La ragione di questo nome consiste nella completa analogia formale esibita dalla definizione 1.5.1, assieme con le tre condizioni di 1.4.1, con con la definizione di misura di probabilità  $\mu$  su uno spazio misurabile  $U$  (si veda, a riguardo, la nota 1.1 a pagina 9).

<sup>9</sup>Come noto, dal teorema spettrale di Von Neumann, esposto in [9], ad ogni operatore autoaggiunto  $G$  in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è associata una risoluzione proiettiva dell'identità, cioè una risoluzione  $\{E(B)/B \in \mathcal{A}(U)\}$  (dove, in questo caso,  $U$  è lo spettro di  $G$ ) tale che ogni  $E(B)$  sia un proiettore e che  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{A}(U)$  valga  $E(B_1)E(B_2) = E(B_1 \cap B_2)$ .

Consideriamo ora due misure di componente dello spin fatte rispetto alle direzioni  $x$  e  $z$ : indichiamo con  $\{P_{x+}, P_{x-}\}$  e  $\{P_{z+}, P_{z-}\}$ , rispettivamente, i proiettori associati a ciascuna misura e con  $P_x$  e  $P_z$  le corrispondenti POVM. Se il sistema si trova nello stato  $\rho$ , le probabilità di ottenere “+” o “-” sono, rispettivamente,  $\text{Tr}[\rho P_{x+}]$  o  $\text{Tr}[\rho P_{x-}]$  nel primo caso, e  $\text{Tr}[\rho P_{z+}]$  o  $\text{Tr}[\rho P_{z-}]$  nel secondo.

Ora, non è difficile immaginare una situazione sperimentale in cui, con probabilità  $p_x$ , viene misurata la componente  $x$  dello spin, mentre con probabilità  $p_z$  viene misurata la componente  $z$ : l’insieme dei possibili risultati in output è  $U = \{x+, x-, z+, z-\}$  e le probabilità di ottenere tali risultati sono, nell’ordine,  $\{p_x \text{Tr}[\rho P_{x+}], p_x \text{Tr}[\rho P_{x-}], p_z \text{Tr}[\rho P_{z+}], p_z \text{Tr}[\rho P_{z-}]\}$ .

La misurazione (perché, a tutti gli effetti, di misurazione si tratta) che corrisponde a questo semplice schema operativo non è più descrivibile in maniera ordinaria: non esiste nessun operatore autoaggiunto agente su uno spazio bidimensionale che abbia uno spettro con *quattro* autovalori.

Il formalismo delle POVM consente invece facilmente di descrivere questa situazione: lo spazio  $U$  dei possibili risultati è discreto, la corrispondente risoluzione finita in accordo col teorema 1.4.1 è  $\{p_x P_{x+}, p_x P_{x-}, p_z P_{z+}, p_z P_{z-}\}$  e la relativa POVM è la combinazione convessa  $P = p_x P_x + p_z P_z$ .

Le POVM permettono quindi di descrivere misurazioni con uno spazio dei risultati molto più ampio di quanto la dimensione finita non consenta alle misure proiettive<sup>10</sup>.

Misure del tipo di quella descritta nell’esempio si dicono *misure randomizzate* e ogni volta che si fa la misura randomizzata di un set di osservabili non commutanti si ottiene necessariamente una misura che non è più descritta da un’osservabile.

La randomizzazione di un set di POVM è invece ancora una POVM, trattandosi semplicemente della combinazione convessa di quelle del set di partenza con pesi dati dalle probabilità di ciascuna misura: questo è il significato fisico della convessità dell’insieme delle POVM.

I punti estremali del convesso rappresentano quelle misure che non possono essere ottenute tramite randomizzazione a partire da altre misure e a questo proposito vale il seguente:

**Teorema 1.5.1** *Le misure proiettive sono punti estremali del convesso delle POVM.*

---

<sup>10</sup>Addirittura, considerato un set *continuo*  $\{\mathbf{n}\}$  di orientazioni spaziali che denotiamo con  $\Sigma$ , si può considerare la misura descritta dalla POVM  $P = \int_{\Sigma} d\mathbf{n} p_{\mathbf{n}} P_{\mathbf{n}}$ , dove  $P_{\mathbf{n}}$  è la POVM corrispondente ad una misura di spin in direzione  $\mathbf{n}$  e  $p_{\mathbf{n}}$  è la densità di probabilità di fare la misura in direzione  $\mathbf{n}$ : in tal caso, l’insieme dei risultati non è nemmeno discreto.

**Dim.** Sia  $P$  una misura proiettiva: formalmente si può scrivere  $P^2 = P$ , sottintendendo  $P^2(B) = P(B) \quad \forall B \in \mathcal{A}(U)$ .

Supponiamo per assurdo che valga

$$P = p_1 E_1 + p_2 E_2 ,$$

dove  $E_1$  ed  $E_2$  sono due POVM distinte.

Allora, dalla condizione  $P^2 = P$  si ottiene, con semplice algebra:

$$p_1 E_1 (\mathbb{I} - E_1) + p_2 E_2 (\mathbb{I} - E_2) + p_1 p_2 (E_1 - E_2)^2 = 0 .$$

Considerando che tutti gli addendi sono “positivi” (nel senso che sono mappe che, applicate a qualsiasi evento  $B$ , danno operatori positivi), l’eguaglianza vale solo se ciascun addendo è nullo, cioè se  $E_1 = E_2$  e  $E_1^2 = E_1$ , quindi  $P$  è estrema. ■

Per concludere, bisogna osservare che, se il convesso delle POVM fosse semplicemente l’insieme delle combinazioni convesse di misure proiettive<sup>11</sup>, allora l’interesse per le POVM verrebbe notevolmente ridimensionato.

È possibile invece mostrare che le cose non stanno così: le misure proiettive non esauriscono l’insieme dei punti estremali del convesso delle POVM, cioè esistono delle POVM che non possono essere ottenute tramite randomizzazione di un set di osservabili ordinarie.

## 1.6 La misura nei postulati della meccanica quantistica

Sebbene il percorso delle precedenti sezioni abbia portato ad introdurre uno strumento matematico per la descrizione della misura molto più generale di quello previsto dalla formulazione ortodossa della meccanica quantistica, tale generalizzazione sembrerebbe ancora incompleta: infatti, finora si è parlato solamente di *probabilità* relative ai vari esiti della misurazione, ma nulla è stato detto circa lo *stato* del sistema a misurazione avvenuta, cioè circa la cosiddetta *riduzione di stato*.

È invece possibile mostrare che le POVM permettono di ricavare anche informazioni circa lo stato dopo la misura.

Lo scopo di questa sezione è di mostrare come il formalismo delle POVM

---

<sup>11</sup>Il convesso formato partendo da un sottinsieme  $I$  di uno spazio vettoriale e prendendo tutte le combinazioni convesse dei suoi elementi si dice *convex hull* (approssimativamente traducibile come *guscio convesso*) di  $I$ .

possa essere inglobato nella formulazione standard semplicemente modificando l'interpretazione del postulato relativo alle misurazioni quantistiche: in pratica concedendo di poter descrivere quantisticamente anche l'apparato di misura (e andando poi a fare delle misure ordinarie sul sistema composto "sistema misurato + apparato misuratore"<sup>12</sup>).

Il discorso verrà affrontato introducendo prima tre versioni semplificate del postulato in questione e poi mostrandone l'equivalenza.

Per semplicità di esposizione faremo riferimento al caso di misure con spazio  $U$  dei risultati discreto.

Inoltre, per iniziare, indicheremo gli stati del sistema con vettori dello spazio di Hilbert invece che con matrici densità: in questo modo l'evoluzione dello stato dovuta alla misura può essere visualizzata più immediatamente.

### 1.6.1 Tre versioni del postulato sulla misura quantistica

**Prima versione** (misure ideali e di prima specie<sup>13</sup>): Ogni misura quantistica con spazio dei risultati discreto  $U = \{u_i\}$  è descritta da una risoluzione dell'identità a proiettori ortogonali  $\{P_i\}$ .

Se lo stato del sistema immediatamente prima della misura è  $|\psi\rangle$ , vale:

- la probabilità di misurare  $u_i$  è  $p_i = \|P_i|\psi\rangle\|^2$ .
- se il risultato ottenuto è  $u_i$ , lo stato immediatamente dopo la misura è  $|\psi_i\rangle = \frac{P_i|\psi\rangle}{\|P_i|\psi\rangle\|}$

**Seconda versione** (POVM): Ad ogni misura quantistica del tipo considerato è associata una risoluzione discreta dell'identità  $\{E_i\}$ , cioè un set di operatori positivi che soddisfa la relazione di completezza  $\sum_i E_i = \mathbb{I}$ : dato lo stato  $|\psi\rangle$  del sistema immediatamente prima della misurazione la probabilità di ottenere il risultato  $u_i$  è  $p_i = \langle\psi|E_i|\psi\rangle$  (regola di Born).

---

<sup>12</sup>Ciò non sarebbe ammesso in un'interpretazione strettamente ortodossa, nella quale gli apparati misuratori sono da considerarsi come sistemi del tutto particolari, fuori dal dominio della descrizione quantistica.

<sup>13</sup>Una misura si dice *ideale* se l'unica fonte di incertezza quantistica è lo stato del sistema (in pratica, se l'apparato non "disturba").

Si dice invece *di prima specie* se non distrugge il sistema misurato e se, una volta ottenuto un certo risultato, un'immediata ripetizione della misura dà *con certezza* il medesimo risultato.

**Terza versione** : Ogni misura quantistica del tipo considerato è descritta da un set di contrazioni<sup>14</sup>  $\{M_i\}$  che soddisfa il requisito di completezza  $\sum_i M_i^\dagger M_i = \mathbb{I}$ .  
 Se lo stato del sistema immediatamente prima della misura è  $|\psi\rangle$ :

- la probabilità di ottenere il risultato  $u_i$  è  $p_i = \|M_i|\psi\rangle\|^2$ .
- se si è ottenuto il risultato  $u_i$ , lo stato immediatamente dopo la misura è  $|\psi_i\rangle = \frac{M_i|\psi\rangle}{\|M_i|\psi\rangle}$ .

La prima versione costituisce quella standard (di von Neumann e Lüders) nel caso di osservabili con spettro discreto: sebbene non si parli esplicitamente di osservabili, se gli  $u_i$  sono numeri reali, si può sempre introdurre l'operatore  $G = \sum_i u_i P_i$  che è autoaggiunto.

La seconda versione è quella delle POVM discrete: come già osservato, apparentemente questo enunciato non dà nessuna informazione circa la riduzione di stato.

La terza versione, invece, sembra essere la più generale: le misure proiettive descritte dalla 1 sono evidentemente una sottoclasse di quelle previste dalla 3, mentre le POVM della versione 2 possono essere ritrovate nella 3 semplicemente ponendo  $E_i = M_i^\dagger M_i$ .

È quindi chiaro che  $3 \Rightarrow 1$  e  $3 \Rightarrow 2$ .

Questa affermazione può essere invertita se si assume di poter descrivere quantisticamente anche l'apparato misuratore: sotto tale ipotesi le tre formulazioni diventano del tutto equivalenti.

## 1.6.2 Equivalenze

**Proposizione 1** *Se si introduce nella descrizione quantistica quella parte dell'apparato misuratore che interagisce con il sistema (comunemente detta ancilla, o anche probe), l'assunzione della prima versione del postulato sulle misure quantistiche implica la validità della terza.*

**Dim.** Il procedimento a cui fa riferimento questa dimostrazione, consistente nel descrivere prima l'interazione fra l'ancilla e il sistema e poi nel fare una misura sull'ancilla, è noto come *schema di misurazione indiretta*.

Siano  $\mathcal{H}_S$  e  $\mathcal{H}_A$  rispettivamente gli spazi di Hilbert di sistema e di ancilla, e

<sup>14</sup>Si dice contrazione un operatore  $M$  la cui norma  $\|M\|$  è minore o uguale a 1, cioè un operatore che soddisfa  $\|M|\psi\rangle\| \leq \| |\psi\rangle \| \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ .

siano  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_S$  e  $|0\rangle \in \mathcal{H}_A$  i rispettivi stati<sup>15</sup> prima della misura. Supponiamo che l'effetto dell'interazione fra il sistema e l'ancilla sia quello di provocare un'evoluzione unitaria  $U$  che verifichi la condizione

$$U|\psi\rangle|0\rangle = \sum_i M_i|\psi\rangle|i\rangle \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_S, \quad (1.16)$$

dove  $\{|i\rangle\}$  è un insieme qualsiasi di vettori ortonormali in  $\mathcal{H}_S$ , mentre  $\{M_i\}$  è un set di contrazioni come quelli di cui parla la versione 3.

Il fatto che una  $U$  così fatta possa essere unitaria può essere verificato osservando innanzitutto che la condizione (1.16) definisce un'isometria  $V$  sullo spazio  $\mathcal{H}_S \otimes |0\rangle = \{|\psi\rangle|0\rangle / |\psi\rangle \in \mathcal{H}_S\}$ :

$$\begin{aligned} \langle \varphi | \langle 0 | V | \psi \rangle | 0 \rangle &= \sum_{i,j} \langle \varphi | M_i^\dagger M_j | \psi \rangle \langle i | j \rangle \\ &= \sum_i \langle \varphi | M_i^\dagger M_i | \psi \rangle \\ &= \langle \varphi | \psi \rangle. \end{aligned}$$

Poiché ogni isometria su un sottospazio può essere completata (eventualmente con un metodo del tipo Gram-Schmidt) ad un operatore unitario, è possibile ottenere la  $U$  cercata a partire da  $V$ .

Ora, se si effettua sull'apparato, una volta terminata l'interazione col sistema, una misura il cui spazio dei risultati è proprio  $U = \{u_i\}$ , descritta nello spazio  $\mathcal{H}_A$  dai proiettori  $\{P_i / P_i = |i\rangle\langle i|\}$ <sup>16</sup>, questo corrisponde, nello spazio di Hilbert complessivo  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$ , ad una misura descritta dai proiettori  $\{\mathbb{I}_s \otimes P_i\}$ .

Coerentemente con la versione 1, la probabilità di ottenere il risultato  $u_i$ , dato che lo stato del sistema complessivo è  $U|\psi\rangle|0\rangle$  sarà

$$\begin{aligned} \langle \psi | \langle 0 | U^\dagger (\mathbb{I}_s \otimes P_i) U | \psi \rangle | 0 \rangle &= \sum_{j,k} \langle \psi | M_j^\dagger \langle j | (\mathbb{I}_s \otimes |i\rangle\langle i|) M_k | \psi \rangle | k \rangle \\ &= \|M_i|\psi\rangle\|^2, \end{aligned}$$

mentre, lo stato ridotto del sistema complessivo sarà

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|M_i|\psi\rangle\|} (\mathbb{I}_s \otimes P_i) U | \psi \rangle | 0 \rangle &= \frac{1}{\|M_i|\psi\rangle\|} (\mathbb{I}_s \otimes |i\rangle\langle i|) \left( \sum_j M_j |\psi\rangle | j \rangle \right) \\ &= \frac{M_i |\psi\rangle}{\|M_i|\psi\rangle\|} | i \rangle. \end{aligned}$$

<sup>15</sup>Il simbolo  $|0\rangle$  scelto per indicare il cosiddetto "stato di pronto" dell'apparato non indica necessariamente lo stato fondamentale di un oscillatore armonico.

<sup>16</sup>In una rappresentazione naïve, questa misura corrisponde all'atto di leggere il risultato della misura sull'indicatore dell'apparato.

Poiché questo stato è fattorizzato, il risultato può essere interpretato dicendo che il sistema è nello stato  $\frac{M_i|\psi\rangle}{\|M_i|\psi\rangle\|}$ , mentre l'apparato è nello stato  $|i\rangle$  (cioè l'indicatore fornisce il risultato "i").

Sia le probabilità di ottenere i vari risultati che la riduzione di stato prevista per il sistema misurato coincidono quindi con quanto prescritto dalla versione 3. ■

È stata dunque dimostrata l'equivalenza  $1 \Leftrightarrow 3$  nell'ipotesi che l'apparato possa essere descritto quantisticamente.

Resta invece da mostrare che la versione 2 è in grado di fornire informazioni anche sulla riduzione di stato, cioè, in pratica, che per descrivere una misura è sufficiente dare una "regola di Born".

La seguente proposizione mostra come ciò sia possibile.

**Proposizione 2** *Nell'ipotesi che l'apparato misuratore sia descrivibile quantisticamente, la seconda versione del postulato sulle misure quantistiche implica la terza.*

**Dim.** Descriviamo quantisticamente l'apparato, considerando, come fatto precedentemente, l'evoluzione  $U$  del sistema complessivo che soddisfa (1.16) ed andando a fare la misura sull'ancilla prevista dalla precedente dimostrazione.

La POVM nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$  associata a questa misura è  $\{E_i / E_i = \mathbb{I}_s \otimes P_i\}$ , per cui la probabilità di ottenere il risultato  $u_i$  sarà  $\langle\psi|\langle 0|U^\dagger E_i U|\psi\rangle|0\rangle = \|M_i|\psi\rangle\|^2$ , come già visto.

Ora, effettuiamo *un'altra misura*, questa volta sul sistema, descritta nello spazio complessivo dalla POVM  $\{|v_j\rangle\langle v_j| \otimes \mathbb{I}_a\}$ , dove  $\{v_j\}$  è una base ortonormale nello spazio di Hilbert di sistema  $\mathcal{H}_S$ .

Se  $|\psi_i\rangle$  è lo stato ridotto del sistema che corrisponde all'aver ottenuto "i" nella prima misura, allora si ottiene che la probabilità condizionata di ottenere "j" nella seconda misura è  $p(j|i) = \|\langle v_j|\psi_i\rangle\|^2$ .

Poiché una misura è fatta sul sistema e l'altra sull'ancilla, si ha che l'ordine delle misure è indifferente e si può quindi definire la misura congiunta delle due: tale misura dà come risultati delle coppie  $(i, j)$  con probabilità  $p(i, j)$ .

La POVM corrispondente è  $\{|v_j\rangle\langle v_j| \otimes |i\rangle\langle i|\}$ , per cui vale

$$\begin{aligned} p(i, j) &= \langle\psi|\langle 0|U^\dagger(|v_j\rangle\langle v_j| \otimes |i\rangle\langle i|)U|\psi\rangle|0\rangle \\ &= \langle\psi|M_i^\dagger|v_j\rangle\langle v_j|M_i|\psi\rangle \\ &= \|\langle v_j|M_i|\psi\rangle\|^2. \end{aligned}$$

Dovendo inoltre valere che  $p(i, j) = p_i p(j|i)$ , si ha:

$$\|\langle v_j|M_i|\psi\rangle\|^2 = \|M_i|\psi\rangle\|^2 \|\langle v_j|\psi_i\rangle\|^2,$$

da cui

$$\langle v_j | \psi_i \rangle \langle \psi | v_j \rangle = \frac{1}{\|M_i|\psi\rangle\|^2} \langle v_j | M_i |\psi\rangle \langle \psi | M_i^\dagger | v_j \rangle .$$

Poiché questa relazione deve valere per ogni base  $\{v_j\}$  (e quindi per ogni arbitrario vettore  $|v_j\rangle$ ), si ha, dall'identità di polarizzazione,

$$|\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \frac{1}{\|M_i|\psi\rangle\|^2} M_i |\psi\rangle \langle \psi | M_i^\dagger ,$$

cioè

$$|\psi_i\rangle = \frac{M_i |\psi\rangle}{\|M_i|\psi\rangle\|} ,$$

a meno di una fase overall. ■

La precedente proposizione completa quindi l'equivalenza fra le tre versioni considerate:  $2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 1$ .

In definitiva, è stato mostrato che, a livello assiomatico, per descrivere una misura, è sufficiente richiedere una “regola di Born” dalla quale si possano ricavare le probabilità dei vari risultati: questo è proprio quello che avviene quando si considerano le POVM.

Come anticipato, l'equivalenza fra le tre versioni vale anche nel caso di misure con spazio dei risultati non necessariamente discreto: la generalizzazione avviene passando a risoluzioni continue dell'identità, analogamente con quanto fatto nella sezione 4.

### 1.6.3 Alcune ulteriori osservazioni

#### Osservazione 1 (differenze con le misure proiettive)

Come già notato nella sezione 5, la classe estesa delle misure rappresentate da POVM è molto più ampia di quella delle ordinarie misure proiettive: una prima osservazione era che l'insieme delle POVM è convesso, mentre quello delle risoluzioni proiettive non lo è.

Altre differenze possono essere evidenziate adottando il punto di vista della terza versione del postulato sulla misura quantistica (misure descritte da set di contrazioni  $\{M_i\}$  con  $\sum_i M_i^\dagger M_i = \mathbb{I}$ ):

- evidentemente tali misure *non* sono necessariamente di prima specie: poiché, in generale, non vale  $M_i^2 = M_i$ , la ripetizione della misura sullo stato ridotto non dà necessariamente lo stesso risultato.

- non è detto che esistano dei vettori per i quali l'esito della misura è certo (analogamente per quanto avveniva con gli autovettori degli operatori autoaggiunti): perché esista un vettore su cui la misura dà con certezza il risultato  $u_i$  è necessario, per lo meno, che sia  $\|M_i\| = 1$ .

### Osservazione 2 (riduzioni di stato associate ad una POVM)

Come visto nella dimostrazione della proposizione 2, dato un set di contrazioni  $\{M_i\}$  è sempre possibile trovare una POVM  $\{E_i\}$  che prevede, come riduzione di stato, quella associata alle contrazioni  $\{M_i\}$ .

Volendo approfondire la questione, è interessante dare una caratterizzazione delle possibili riduzioni di stato compatibili con la distribuzione di probabilità associata ad una POVM: ciò risulta possibile grazie ad un semplice ragionamento.

Sia  $\{E_i\}$  la POVM considerata. Poiché ogni operatore  $E_i$  è positivo è possibile considerare le radici quadrate  $\{\sqrt{E_i}\}$ <sup>17</sup>.

Una contrazione  $M_i$  che dia probabilità per i vari risultati in accordo con  $E_i$ , deve soddisfare  $M_i^\dagger M_i = E_i$  e quindi deve avere necessariamente la forma:

$$M_i = V_i \sqrt{E_i}, \quad (1.17)$$

dove  $V_i$  è un'isometria tale che  $V_i^\dagger V_i = \mathbb{I}$ .

La (1.17) fornisce quindi tutte le possibili riduzioni di stato associate ad una POVM data.

L'isometria  $V$  viene talvolta detta rappresentare la *retroazione* (back-action) dello strumento di misura sul sistema: l'origine di questa denominazione può essere mostrata considerando il seguente esempio.

Se in uno spazio di Hilbert di oscillatore armonico si considera la POVM proiettiva associata alla misura dell'energia, cioè  $\{E_i/E_i = |i\rangle\langle i|\}$ , allora si ha che  $\sqrt{E_i} = E_i$  e quindi le possibili riduzioni di stato associate sono date da contrazioni  $\{M_i\}$  che verificano  $M_i = V_i |i\rangle\langle i|$ .

Nel caso in cui i  $\{V_i\}$  siano operatori unitari, un processo di misura così fatto può essere pensato nel modo seguente: *prima* lo strumento fa una misura standard dell'osservabile energia, *dopodiché*, a seconda del risultato ottenuto

---

<sup>17</sup>Poiché  $E_i$  è autoaggiunto, per il teorema di von Neumann, è possibile darne una rappresentazione spettrale (nel caso di spettro puramente discreto questo equivale a diagonalizzare  $E_i$ ).

Visto che inoltre  $E_i$  è positivo, e che vale  $\|E_i\| \leq 1$ , lo spettro di  $E_i$  sarà incluso nell'intervallo  $[0, 1]$ , quindi si può fare la radice quadrata di  $E_i$  come funzione operatoriale (che nel caso discreto significa fare la radice quadrata degli autovalori), limitata e ovunque definita.

(in questo senso si parla di retroazione), esso accende un'interazione che causa sullo stato ridotto la dinamica descritta da una delle trasformazioni unitarie  $\{V_i\}$ .

Si può fornire anche un esempio di misura di questo tipo dove i  $V_i$  non sono unitari ma soltanto isometrici: un caso di questo tipo si ha con  $V_i = S \forall i$ , dove  $S$  è l'operatore di shift definito da

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} |n+1\rangle\langle n| .$$

Con questa scelta gli operatori di state reduction sono dati da

$$M_i = S|i\rangle\langle i| = |i+1\rangle\langle i|$$

(ovviamente vale la completezza:  $\sum_{i=0}^{+\infty} |i\rangle\langle i+1|i+1\rangle\langle i| = \sum_{i=0}^{+\infty} |i\rangle\langle i| = \mathbb{I}$ ). Il processo di misura in questione può essere pensato come una misura di energia seguita da una ripreparazione del sistema che dipende dal risultato ottenuto (se si ottiene “i”, il sistema viene ripreparato nello stato  $|i+1\rangle$ ).

È bene però ricordare che potrebbero esserci anche modi diversi da quelli qui immaginati per realizzare le misure considerate e che, nel caso di POVM non proiettive, non si può più ricondurre il discorso a misure di osservabili standard in maniera così immediata.

### Osservazione 3 (misure su stati miscela)

È possibile tradurre tutto quanto esposto finora circa la riduzione di stato (nel caso di misure con spettro discreto) nel formalismo delle matrici densità, così da poter trattare direttamente anche le miscele quantistiche.

Per esempio la versione standard del postulato sulle misure quantistiche prevede che ad ogni misura sia associato un set di proiettori ortogonali  $\{P_i\}$ , ciascuno corrispondente ad un risultato della misura, con le prescrizioni:

- se lo stato immediatamente prima dalla misura è  $\rho$ , allora la probabilità che il risultato sia  $u_i$  è  $\text{Tr}[\rho P_i]$ .
- lo stato ridotto è  $\frac{1}{\text{Tr}[\rho P_i]} P_i \rho P_i$ .

Per riduzioni di stato ottenute tramite set di contrazioni  $\{M_i\}$  vale invece l'analogo di quanto previsto dalla terza versione:

- dato lo stato  $\rho$  immediatamente prima della misura, la probabilità che il risultato sia  $u_i$ , è  $p_i = \text{Tr}[M_i^\dagger M_i \rho]$ .
- lo stato ridotto è  $\rho_i = \frac{1}{\text{Tr}[M_i^\dagger M_i \rho]} M_i \rho M_i^\dagger$

Si può notare che, se si assume una delle versioni del postulato enunciate per stati puri, le prescrizioni sulle probabilità dei vari eventi e sulla riduzione di stato date qui sopra per stati generici seguono naturalmente: le probabilità in forma di tracce derivano dalla legge delle probabilità composte, mentre, per quanto riguarda la riduzione di stato, è facile convincersi che lo stato ridotto che si ottiene a partire da una miscela di stati puri è la miscela dei singoli stati ridotti, da cui le formule considerate.

#### 1.6.4 Riduzioni di stato nel caso generale: il concetto di strumento

Quanto detto nelle precedenti sottosezioni era riferito caso di misure con spettro dei risultati discreto  $U = \{u_i\}$  e ciascuna delle riduzioni di stato considerata era associata al comparire di uno dei possibili risultati  $\{u_i\}$ .

Si possono considerare però anche schemi di misura nei quali non viene rilevato un preciso risultato  $u_i$ , ma soltanto se il risultato appartiene ad un certo sottinsieme di  $U$ .

Una generalizzazione di questo tipo diventa assolutamente necessaria se si vogliono considerare anche misure con spettro non necessariamente discreto: in questi casi il risultato della misura non è *mai* un elemento  $u$  dello spazio  $U$ , ma sempre un evento  $B$  sottinsieme di  $U$ <sup>18</sup>.

Seguendo [15], allo scopo di descrivere la riduzione di stato nel caso generale, si introduce allora il concetto di *strumento*: il significato della definizione che verrà data può essere reso chiaro se si considera cosa avviene, nel caso discreto, qualora non venga rilevato un singolo risultato.

Se immaginiamo di fare, su un sistema inizialmente nello stato  $\rho$ , una misura descritta dalle contrazioni  $\{M_i\}$ , e supponiamo di non distinguere fra i vari risultati  $\{u_i\}$  che costituiscono un certo sottinsieme  $B$ , allora quello che otteniamo in uscita è lo stato miscela  $\rho_B$  degli stati  $\rho_i$  con probabilità

---

<sup>18</sup>Per esempio, quando si misura la posizione di una particella (o qualsiasi altra osservabile con spettro continuo) non si ottiene mai un singolo valore  $x$ , ma sempre un intervallo di valori  $(x - \Delta, x + \Delta)$ , più o meno stretto a seconda della precisione della misura.

rispettivamente  $p(i|B)$ , dove

$$p(i|B) = \frac{p_i}{\sum_{u_j \in B} p_j} .$$

Usando le espressioni per  $p_i$  e  $\rho_i$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho_B &= \sum_{u_i \in B} \left( \frac{\text{Tr}[M_i^\dagger M_i \rho]}{\sum_{u_j \in B} \text{Tr}[M_j^\dagger M_j \rho]} \right) \left( \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{\text{Tr}[M_i^\dagger M_i \rho]} \right) \\ &= \frac{1}{\left( \sum_{u_j \in B} \text{Tr}[M_j^\dagger M_j \rho] \right)} \sum_{u_i \in B} M_i \rho M_i^\dagger . \end{aligned}$$

Se chiamiamo  $\mathcal{I}(B)$  la mappa che manda  $\rho$  in  $\sum_{u_i \in B} M_i^\dagger \rho M_i$ , l'espressione di  $\rho_B$  può essere riscritta come:

$$\rho_B = \frac{\mathcal{I}(B)\rho}{\text{Tr}[\mathcal{I}(B)\rho]} .$$

Questa formula suggerisce allora di dare una definizione assiomatica della famiglia di mappe  $\{\mathcal{I}(B)/B \in \mathcal{A}(U)\}$  che danno, in pratica, la riduzione di stato.

**Definizione 1.6.1** *Si dice strumento una mappa  $\mathcal{I}$ , definita sulla  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}(U)$  degli eventi, che associa ad ogni evento  $B$  una mappa affine  $\mathcal{I}(B)$ , definita dal convesso delle matrici densità nell'insieme  $\mathbb{T}_+(\mathcal{H})$  degli operatori positivi di classe traccia, in modo che valgano le seguenti condizioni:*

1.  $\mathcal{I}(\emptyset) = 0$  ,  $\mathcal{I}(U) = id$
2. per ogni spazio di Hilbert  $\mathcal{K}$ , l'estensione  $\mathcal{I}(B) \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{K}}$  della mappa  $\mathcal{I}(B)$  sul prodotto tensore  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$  è positiva, cioè, per ogni matrice densità  $\rho$  in  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$  si ha che:

$$(\mathcal{I}(B) \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{K}}) \rho \geq 0 \quad \forall B \in \mathcal{A}(U) , \quad (1.18)$$

3. per ogni set  $\{B_i\}$  di eventi a due a due disgiunti vale

$$\mathcal{I}(\cup_i B_i) = \sum_i \mathcal{I}(B_i) . \quad (1.19)$$

La seconda condizione prevista da 1.6.1 è nota come *completa positività* delle mappe  $\mathcal{I}(\mathcal{B})$  e, come si vedrà, la necessità di questa richiesta è legata ad un motivo fisico molto diretto.

È interessante inoltre notare la somiglianza formale di 1.6.1 con la definizione di misura di probabilità (vd. nota 2) o con quella di POVM (vd. sezione 4): in pratica lo strumento è una misura di probabilità valutata con mappe completamente positive.

Grazie alla definizione di strumento si può fornire una versione generale del postulato relativo alle misure quantistiche che contiene esplicitamente sia una regola di Born per il calcolo delle probabilità che una prescrizione per la riduzione di stato.

### Versione generale

Ogni misura quantistica è descritta da uno strumento  $\mathcal{I}$ . Se lo stato del sistema immediatamente prima della misura è  $\rho$ , allora

- la probabilità che l'evento  $B$  si verifichi è  $\text{Tr}[\mathcal{I}(B)\rho]$
- se si è verificato l'evento  $B$ , lo stato ridotto è

$$\rho_B = \frac{\mathcal{I}(B)\rho}{\text{Tr}[\mathcal{I}(B)\rho]} . \quad (1.20)$$

Prima di concludere questa sezione si possono fare due osservazioni.

#### Osservazione 1 (sulla completa positività)

Dato che la riduzione di stato avviene in accordo con la (1.20), è necessario per lo meno che le mappe  $\mathcal{I}(B)$  siano positive, cioè che mandino matrici densità in operatori positivi di classe traccia (in pratica, operatori proporzionali a matrici densità con costanti di proporzionalità positive).

Se però consideriamo il sistema su cui facciamo le misure come parte di un sistema composto nello stato  $\rho \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ , allora la nostra misura locale viene descritta nello spazio esteso dallo strumento  $\mathcal{I} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{K}}$  ed è quindi necessario che anche le mappe  $\mathcal{I}(B) \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{K}}$  siano positive, da cui la richiesta di completa positività per le mappe  $\mathcal{I}(B)$ .

Tale richiesta non è affatto superflua, come potrebbe a prima vista sembrare: la semplice positività non è sufficiente per garantire la completa positività di una mappa.

Infatti, data una mappa positiva  $\mathcal{M}$ , sebbene l'applicazione di  $\mathcal{M}$  ad uno stato separabile<sup>19</sup>  $\rho = \sum_i p_i \rho_i \otimes \sigma_i$  non dia nessun problema (in questo caso

<sup>19</sup>Uno stato  $\rho \in T_+(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$  si dice *separabile* se è ottenibile come miscela da un set di stati fattorizzati  $\{\rho_i \otimes \sigma_i\}$ , cioè se  $\rho = \sum_i p_i \rho_i \otimes \sigma_i$ .

l'operatore  $(\mathcal{M} \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{K}}) \rho = \sum_i p_i \mathcal{M}(\rho_i) \otimes \sigma_i$  è positivo), nel caso in cui lo stato  $\rho$  non è separabile le cose possono andare molto diversamente.

Un tipico esempio a questo proposito è la mappa trasposizione  $\theta$ : il trasposto di un operatore positivo è sempre un operatore positivo, ma la trasposizione parziale  $\theta \otimes \mathbb{I}_{\mathcal{K}}$  di un operatore positivo non dà necessariamente un altro operatore positivo (addirittura, si può dimostrare che la trasposta parziale di una matrice densità associata ad un stato puro ma entangled su  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$  non è *mai* positiva<sup>20</sup>).

### Osservazione 2 (relazione fra strumento e POVM)

Come già visto nel caso discreto, ad ogni riduzione di stato è associata in maniera univoca una POVM  $E$  che fornisce le probabilità dei vari eventi.

Tale POVM è determinata dalla relazione:

$$\mathrm{Tr}[\rho E(B)] = \mathrm{Tr}[\mathcal{I}(B)\rho] \quad \forall \rho \in T_+(\mathcal{H}), \quad \forall B \in \mathcal{A}(U) . \quad (1.21)$$

Infatti, poiché questa relazione deve valere per ogni  $\rho$ , deve valere in particolare per gli stati puri  $|\psi\rangle\langle\psi|$ , quindi, a fissato  $B$ , gli elementi di matrice diagonali di  $E(B)$  sono fissati (infatti  $\langle\psi|E(B)|\psi\rangle = \mathrm{Tr}[\mathcal{I}(B)|\psi\rangle\langle\psi|]$  per ogni stato puro  $|\psi\rangle$ ).

D'altra parte, per la seconda identità di polarizzazione, ogni elemento non diagonale può essere ricavato a partire da quelli diagonali, per cui la POVM  $E$  è univocamente determinata dallo strumento  $\mathcal{I}$ .

Ad una POVM data corrispondono invece più riduzioni di stato e quindi più strumenti diversi, come già era stato osservato nel caso discreto.

### Osservazione 3 (misure e generiche trasformazioni quantistiche)

Per concludere, accenniamo brevemente al ruolo privilegiato delle misure all'interno del formalismo generale per la descrizione delle trasformazioni quantistiche.

Una qualsiasi trasformazione quantistica, sia che si tratti dell'evoluzione unitaria di un sistema isolato, sia che si tratti di quella stocastica di un sistema aperto, può essere sempre rappresentata grazie ad una *operazione quantistica*, dove con questo termine si intende una mappa affine  $\mathcal{E}$ , definita dal convesso degli stati nell'insieme degli operatori positivi di classe traccia, che sia completamente positiva e che soddisfi la condizione  $\mathrm{Tr}[\mathcal{E}(\rho)] \leq 1$ .

In questa descrizione  $\mathrm{Tr}[\mathcal{E}(\rho)]$  rappresenta la probabilità che la trasformazione descritta da  $\mathcal{E}$  avvenga, mentre  $\rho' = \frac{\mathcal{E}(\rho)}{\mathrm{Tr}[\mathcal{E}(\rho)]}$  è lo stato a trasformazione avvenuta.

---

<sup>20</sup>È bene ricordare che questa affermazione vale *per stati puri*: nel caso di stati misti la trasposta parziale di uno stato entangled può rimanere positiva.

Ovviamente, la riduzione di stato successiva ad una misura è un caso particolare di trasformazione quantistica, dove l'operazione quantistica  $\mathcal{E}$  associata al verificarsi di un certo evento  $B$  si ottiene dallo strumento  $\mathcal{I}$  prendendo  $\mathcal{I}(B)$ .

La cosa curiosa, però, è che vale anche il risultato inverso: ogni generica trasformazione quantistica può, in definitiva, essere vista come il verificarsi di uno degli eventi associati ad una qualche misura.

È possibile infatti dimostrare (a questo proposito si può vedere [16]) che ad ogni mappa affine completamente positiva  $\mathcal{E}$  è associato un set discreto di operatori  $\{M_i / i \in A\}$  (dove  $A$  è un insieme numerabile di indici), in modo che sia

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{i \in A} M_i \rho M_i^\dagger . \quad (1.22)$$

Chiaramente, perché valga anche  $\text{Tr}[\mathcal{E}(\rho)] \leq 1$  per ogni  $\rho$ , deve avvenire necessariamente che  $\sum_{i \in A} M_i^\dagger M_i \leq \mathbb{I}$ , per cui l'operatore  $E_{out} = \mathbb{I} - \sum_{i \in A} M_i^\dagger M_i$  è senz'altro positivo.

Se chiamiamo  $M_{out} = V\sqrt{E_{out}}$ , dove  $V$  è una qualsiasi isometria tale che  $V^\dagger V = \mathbb{I}$ , possiamo considerare il set di contrazioni  $\{M_j / j \in A_o\}$ , con  $A_o = \{out\} \cup A$ .

Tale set rappresenta una misura (infatti  $\sum_{j \in A_o} M_j^\dagger M_j = \mathbb{I}$ , come richiesto dalla condizione di completezza) con spazio dei risultati  $A_o$ , quindi l'operazione quantistica  $\mathcal{E}$  può essere pensata come il verificarsi dell'evento  $B = \{u_i / i \in A\}$ .

Quando invece il risultato della misura è "out" la trasformazione descritta da  $\mathcal{E}$  non si verifica.

## 1.7 Realizzazione di misurazioni

Prima di concludere il capitolo è opportuno un accenno al problema della *realizzabilità* delle misurazioni quantistiche.

Nel paragrafo 1.6.2 si era accennato agli schemi di misura indiretta, nei quali una misura generica sullo spazio di sistema  $\mathcal{H}_S$  veniva ricondotta ad una misura proiettiva sullo spazio esteso  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A$ , fatta a seguito dell'interazione del sistema con un'ancilla.

Schemi di questo tipo danno una prima risposta alla domanda circa la realizzabilità della misura: se è possibile realizzare l'interazione richiesta, allora la realizzabilità della misura è equivalente a quella di un'osservabile ordinaria sullo spazio esteso.

Più in generale, è possibile ricondurre misure generiche a misure proiettive,

senza riferimento esplicito ad un particolare schema di misura, grazie al seguente teorema dovuto a Naïmark [17].

**Teorema 1.7.1** *Data una risoluzione discreta dell'identità  $\{E_i\}$  sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_S$ , si possono sempre trovare uno spazio ancillare  $\mathcal{H}_A$ , uno stato  $|0\rangle \in \mathcal{H}_A$  e una risoluzione proiettiva dell'identità  $\{P_i\}$  in  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$  tali che*

$$\langle \psi | E_i | \psi \rangle = \langle \psi | \langle 0 | P_i | \psi \rangle | 0 \rangle \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_S, \forall i ,$$

*cioè, in definitiva,  $E_i = \langle 0 | P_i | 0 \rangle \quad \forall i$ .*

La risoluzione proiettiva  $\{P_i\}$  è comunemente detta *estensione di Naïmark* della risoluzione  $\{E_i\}$ .

Una versione successiva [18] del teorema generalizza poi l'enunciato a estensioni dello spazio di Hilbert di sistema ottenute senza ricorrere al prodotto tensore con uno spazio ancillare, ma semplicemente considerando una dilatazione di  $\mathcal{H}_S$ :

**Teorema 1.7.2** *Data una generica risoluzione discreta dell'identità  $\{E_i\}$  sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_S$ , esistono uno spazio di Hilbert esteso  $\tilde{\mathcal{H}}$  e una risoluzione proiettiva dell'identità  $\{P_i\}$  su  $\tilde{\mathcal{H}}$  tali che*

- $\mathcal{H}_S$  è isomorfo ad un sottospazio  $W$  di  $\tilde{\mathcal{H}}$
- detto  $P_W$  il proiettore su  $W \simeq \mathcal{H}_S$ , vale

$$E_i = P_W P_i P_W \quad \forall i .$$

Nella maggior parte dei casi è poi possibile generalizzare ulteriormente questi risultati anche a risoluzioni  $\{E(B) / B \in \mathcal{A}(U)\}$  corrispondenti a misure con spazio dei risultati  $U$  continuo: ciò avviene in maniera iterativa, discretizzando  $U$  tramite decomposizioni sempre più fini composte da sottinsiemi misurabili disgiunti e applicando di volta in volta il teorema 1.7.2 alle relative risoluzioni discrete.

Quando possibile<sup>21</sup>, questo processo porta ad ottenere uno spazio di Hilbert  $\tilde{\mathcal{H}}$  che estende  $\mathcal{H}_S$  ( $\mathcal{H}_S \simeq W \subset \tilde{\mathcal{H}}$ ), sul quale è definita una risoluzione proiettiva  $\{P(B)\}$  con la caratteristica che la sua restrizione a  $W$  è  $\{E(B)\}$ .

È quindi chiaro come la realizzabilità di una misura generalizzata sia strettamente legata a quella della misura di un'opportuna osservabile su qualche spazio esteso.

---

<sup>21</sup>Degli esempi fisici di notevole interesse a questo proposito si possono trovare in [6, 19].



## Capitolo 2

# Teoria quantistica della stima

L'estensione della classe delle misure quantistiche illustrata nel precedente capitolo grazie ai concetti di POVM e di strumento diventa particolarmente utile in una serie di casi in cui si è interessati al valore di alcuni parametri riguardanti lo stato del sistema non associabili a nessuna osservabile standard. Esempi di questa situazione sono la misura di un intervallo temporale, quella della fase di un oscillatore armonico, o anche la misura congiunta della posizione e del momento di una particella: a queste misure non corrisponde nessun operatore autoaggiunto.

A dispetto di una tale mancanza, nel formalismo delle POVM è sufficiente che l'insieme  $\Theta$  dei parametri di interesse sia misurabile, dopodiché qualsiasi mappa affine che mandi stati quantistici in distribuzioni di probabilità su  $\Theta$  corrisponde, in linea di principio, ad una possibile misura.

Ci si trova quindi nella situazione opposta rispetto al caso ordinario: è presente una quantità sovrabbondante di possibili misure e si rendono necessari dei criteri per discriminare quali fra queste siano effettivamente opportune (in relazione al significato fisico dei parametri in questione) ed eventualmente, se tra tutte ne esista una ottima in base a qualche requisito di merito.

A questo proposito, un contributo essenziale viene dalla *teoria quantistica della stima*, grazie alla quale è possibile dare una formulazione ben definita ai problemi sopra accennati.

Nel presente capitolo verrà prima formalizzato il problema di stima nel caso in cui lo spazio dei risultati della misura considerata sia in corrispondenza biunivoca con una famiglia di stati, fornendo una definizione matematicamente precisa di cosa si intenda per “misura ottima secondo un certo requisito di merito”.

Successivamente verrà introdotto il concetto di famiglie covarianti rispetto alla rappresentazione di un gruppo di Lie: su di esse diventa naturale assu-

mere anche la covarianza delle misure, dando così al problema di stima quella forma particolare che sarà al centro dell'interesse della tesi.

## 2.1 Stime su famiglie parametriche di stati

La tipica situazione a cui fa riferimento la teoria quantistica della stima è la seguente: lo stato del sistema considerato non è noto, tuttavia, per qualche ragione, si sa che esso appartiene ad una certa famiglia di stati  $\{\rho_\theta / \theta \in \Theta\}$ , parametrizzata da elementi dell'insieme misurabile  $\Theta$ .

Per esempio, lo stato potrebbe risultare da un processo di preparazione non completamente controllabile: in questo caso il parametro  $\theta$  rappresenterebbe una qualche caratteristica del processo in questione.

Si pone quindi il problema di stimare *quale* fra tutti i possibili stati sia quello in cui il sistema effettivamente si trovi: il modo più diretto per farlo è quello di predisporre una misura del parametro  $\theta$  così da associare al risultato  $\theta$  lo stato  $\rho_\theta$ .

Supponiamo che la POVM  $E$  associata alla misura considerata sia esprimibile come

$$E(B) = \int_B M(\theta)\nu(d\theta) \quad \forall B \in \mathcal{A}(\Theta) , \quad (2.1)$$

dove  $M(\theta)$  è una funzione definita da  $\Theta$  nell'insieme delle contrazioni positive su  $\mathcal{H}$  e  $\nu$  è una qualche misura su  $\Theta$ <sup>1</sup>.

In questi casi si dice che  $M(\theta)$  è la *densità operatoriale* (detta anche *derivata di Radon-Nicodym*<sup>2</sup>) di  $E$  rispetto alla misura  $\nu$ , ed è quindi possibile definire una *densità di probabilità*<sup>3</sup> di ottenere il risultato  $\theta$ .

La densità di probabilità condizionata di ottenere il risultato  $\theta^*$  posto che il valore vero è  $\theta$  è data allora da:

$$p(\theta^*|\theta) = \text{Tr}[\rho_\theta M(\theta^*)] .$$

---

<sup>1</sup>Per la definizione dell'integrale di una funzione in una generica misura si può vedere [5].

<sup>2</sup>Una trattazione completa sulle derivate di Radon-Nicodym può essere trovata in [20]

<sup>3</sup>In generale, data una qualunque distribuzione di probabilità  $\mu$  sull'insieme  $\Theta$ , non è detto che le si possa associare una funzione  $p(\theta)$  tale che

$$\mu(B) = \int_B p(\theta)\nu(d\theta) \quad \forall B \in \mathcal{A}(\Theta) :$$

è necessario infatti che  $\mu$  sia *assolutamente continua* rispetto alla misura  $\nu$ .

Poiché in generale non si verifica che  $p(\theta^*|\theta) = \delta(\theta^*, \theta)$ , cioè in generale il parametro  $\theta$  non è discriminabile in maniera esatta<sup>4</sup>, diventa importante definire un modo per pesare gli errori di stima.

Ciò può essere fatto introducendo una funzione continua (detta *funzione costo*) che associa ad ogni coppia valore stimato-valore vero un “costo”  $c(\theta^*, \theta)$  in modo che questo sia minimo quando  $\theta^* = \theta$ .

Diventa allora possibile definire con precisione cosa si intende quando si dice che una misura è “migliore” di un’altra: mediando la funzione costo su tutti i possibili risultati della misura, ciascuno pesato dalla sua probabilità, si ottiene la quantità

$$\begin{aligned} c(\theta) &= \int_{\Theta} c(\theta^*, \theta) p(\theta^*|\theta) d\nu(\theta^*) \\ &= \int_{\Theta} c(\theta^*, \theta) \text{Tr}[\rho_{\theta} M(\theta^*)] d\nu(\theta^*) , \end{aligned}$$

che possiamo chiamare “costo della misura” rispetto allo stato  $\rho_{\theta}$ : questa è quindi tanto migliore quanto più il suo costo è piccolo.

Nel linguaggio delle POVM, si può notare come la precedente relazione permetta di introdurre un funzionale  $\mathcal{C}(\theta)$  della densità operatoriale  $M$ , definito da

$$\mathcal{C}(\theta)[M] = c(\theta) \quad \forall \theta ,$$

detto *funzionale costo* per lo stato  $\rho_{\theta}$ .

Poiché il funzionale costo è affine (essendo dato, in definitiva, dall’integrale di una traccia) e poiché l’insieme delle funzioni  $M(\theta)$  corrispondenti alle possibili POVM è convesso, si ha che il minimo viene raggiunto in corrispondenza di un punto estrema di tale insieme.

Le POVM che rendono minimo il funzionale costo si dicono *ottimali*.

Bisogna tuttavia osservare che la minimizzazione di  $\mathcal{C}(\theta)$  fornisce delle POVM ottimali che dipendono da  $\theta$ , e non è detto, in generale, che una POVM ottimale per un certo valore  $\theta$  lo sia anche per gli altri.

---

<sup>4</sup>Con il simbolo  $\delta(\theta^*, \theta)$  si intende, formalmente, una “funzione” tale che

$$\int_B \delta(\theta^*, \theta) \nu(d\theta^*) = \chi_B(\theta) \quad \forall B \in \mathcal{A}(\Theta) ,$$

dove  $\chi_B$  è la funzione caratteristica dell’insieme  $B$ .

È bene ricordare che, da un punto di vista rigoroso, la “funzione”  $\delta(\theta^*, \theta)$  così definita, *non* è una funzione di  $\theta^*$  e  $\theta$ , bensì un *funzionale*, dipendente dal parametro  $\theta$ .

Una discriminazione esatta del parametro  $\theta$  si può avere solo nel caso particolare in cui la famiglia parametrica in questione rappresenta un set di stati ortogonali.

Visto che non è possibile minimizzare  $\mathcal{C}(\theta)$  per ogni  $\theta$  si ricorre allora a due possibili approcci, che forniscono dei criteri di merito “globali”:

1. Approccio bayesiano

Tale approccio consiste nell’attribuire al parametro  $\theta$  una distribuzione di probabilità *a priori* (che corrisponde alla probabilità che lo stato sia  $\rho_\theta$ ): si ricerca quindi la densità operatoriale  $M(\theta)$  che minimizza il costo medio, cioè il funzionale affine  $\langle \mathcal{C} \rangle$  definito da

$$\langle \mathcal{C} \rangle [M] = \int_{\Theta} \nu(d\theta) \int_{\Theta} \nu(d\theta^*) c(\theta^*, \theta) \text{Tr}[\rho_\theta M(\theta^*)] .$$

2. Approccio minimax

In questo approccio si cerca di minimizzare in  $M(\theta)$  la quantità

$$c_{max} = \max_{\theta \in \Theta} c(\theta) ,$$

cioè il costo massimo della misura.

È bene tenere presente che, in generale, i due approcci descritti possono essere notevolmente diversi: alla quantità  $c_{max}$  non corrisponde generalmente un funzionale affine e quindi la POVM ottima secondo l’approccio minimax potrebbe non essere un punto estremale del convesso delle POVM.

## 2.2 Misure covarianti

Un caso notevole di stime del tipo di quelle illustrate nella precedente sezione si ha nel caso di *famiglie covarianti*: con questo nome si intendono, in pratica, quelle famiglie di stati originate da un certo stato di partenza  $\rho_0$  tramite l’applicazione di un qualche gruppo di trasformazioni.

Per precisare i termini del discorso, e per poter specializzare a questo tipo di famiglie la formulazione del problema di stima, è necessario prima di tutto introdurre qualche nozione generale sui gruppi di Lie (per una maggiore completezza si rimanda a [21, 22]).

### 2.2.1 Generalità sui gruppi di Lie

**Definizione 2.2.1** *Si dice che il gruppo  $G$  è un gruppo di Lie se:*

- $G$  è una varietà differenziabile (indicata anch'essa con la lettera  $G$ )
- l'operazione di composizione  $g_1g_2$  è differenziabile ad ogni ordine

È opportuno precisare fin dall'inizio che, in quanto segue, i gruppi considerati non saranno semplicemente gruppi astratti, ma gruppi agenti su varietà differenziabili, che indicheremo con  $\Theta$ .

A questo proposito, si richiederà sempre che, per ogni elemento  $g$  del gruppo, la trasformazione indotta da  $g$  sulla varietà  $\Theta$  sia differenziabile in  $\theta$  (oltre che in  $g$ , ovviamente).

**Definizione 2.2.2** *Un gruppo di Lie si dice compatto se la corrispondente varietà  $G$  è compatta.*

Due semplici esempi di gruppi di Lie sono il gruppo delle rotazioni attorno ad assi passanti per l'origine nello spazio euclideo tridimensionale e quello delle traslazioni sulla retta reale: le varietà corrispondenti a questi gruppi sono, rispettivamente, una superficie sferica nel primo caso e una retta nel secondo, quindi il primo gruppo è compatto, mentre il secondo no.

**Definizione 2.2.3** *Si dice che il gruppo  $G$  agisce transitivamente sulla varietà  $\Theta$  se, per ogni elemento  $\theta_0$  di  $\Theta$ , si ha che l'orbita di  $\theta_0$  è tutta la varietà  $\Theta$ , cioè se vale  $G\theta_0 = \Theta$ , dove  $G\theta_0 = \{g\theta_0 / \forall g \in G\}$ .*

Per esempio, il gruppo delle rotazioni in tre dimensioni attorno ad assi passanti per l'origine agisce transitivamente su tutte le superfici sferiche con centro nell'origine stessa, ma non agisce transitivamente su tutto lo spazio tridimensionale.

In quanto segue ci occuperemo sempre di gruppi che agiscono transitivamente sulle rispettive varietà.

**Definizione 2.2.4** *Dato un punto  $\theta_0$  della varietà  $\Theta$ , il sottogruppo  $G_0$  degli elementi di  $G$  che lasciano invariante  $\theta_0$  si dice sottogruppo stazionario.*

Poiché il gruppo  $G$  agisce transitivamente sulla varietà  $\Theta$ , è facile mostrare che tutti i sottogruppi stazionari al variare di  $\theta_0$  previsti dalla precedente definizione sono fra loro equivalenti, cioè, dati due sottogruppi stazionari  $G_0^{(1)}$  e

$G_0^{(2)}$ , esiste sempre un  $g \in G$  tale che  $G_0^{(2)} = gG_0^{(1)}g^{-1}$  (basta prendere  $g$  tale che  $\theta_2 = g\theta_1$ ); per questa ragione<sup>5</sup>, in quanto segue, si parlerà delle proprietà del sottogruppo stazionario, senza ulteriori specificazioni.

Si può poi notare anche che, fissato un  $\theta_0$ , se il sottogruppo stazionario è banale ( $G_0 = id$ ), allora la corrispondenza  $g \mapsto \theta = g\theta_0$  è biunivoca: ogni elemento della varietà è rappresentato da un elemento del gruppo.

**Definizione 2.2.5** Una misura<sup>6</sup>  $\mu$  sul gruppo si dice left-invariante se

$$\mu(g\Omega) = \mu(\Omega) \quad \forall \Omega \in \mathcal{A}(G), \quad (2.2)$$

dove  $g\Omega = \{g' \mid g' = gg'', \text{ dove } g'' \in \Omega\}$ .

Analogamente si può dare una definizione di misura *right-invariante*:

$$\mu(\Omega g) = \mu(\Omega) \quad \forall \Omega \in \mathcal{A}(G).$$

**Definizione 2.2.6** Una misura  $\mu$  si dice invariante se è sia left-invariante che right-invariante.

**Definizione 2.2.7** Un gruppo  $G$  si dice unimodulare se su di esso è definita una misura invariante.

Bisogna osservare che, in ogni caso, non è detto che valga  $\mu(G) < \infty$ , cioè non è detto che il gruppo  $G$  sia *finito* (a proposito si veda la nota 1.1 a pagina 9 del primo capitolo).

Questo problema non si pone se il gruppo è compatto: in questo caso ogni misura left-invariante è anche right-invariante (e viceversa) ed è sempre possibile normalizzare una tale misura in modo che sia  $\mu(G) = 1$ .

**Definizione 2.2.8** Sia  $G$  un gruppo unimodulare. Una misura  $\nu$  sulla varietà  $\Theta$  si dice invariante se

$$\nu(gB) = \nu(B) \quad \forall B \in \mathcal{A}(\Theta), \forall g \in G, \quad (2.3)$$

dove con  $gB$  si intende l'insieme  $\{g\theta \mid \forall \theta \in B\}$ .

---

<sup>5</sup>Si può osservare che la relazione  $G_0^{(2)} = gG_0^{(1)}g^{-1}$  stabilisce un diffeomorfismo: quindi i sottogruppi stazionari godono tutti delle stesse proprietà topologiche e di varietà differenziale.

<sup>6</sup>In quanto varietà differenziabile, un gruppo di Lie  $G$  costituisce anche uno spazio misurabile, con la rispettiva  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{A}(G)$ .

Si può mostrare che, se anche il sottogruppo stazionario  $G_0$  del gruppo  $G$  è unimodulare, allora è sempre possibile definire una misura invariante sulla varietà.

In più, se  $G_0$  è un gruppo compatto, tale misura può essere costruita in maniera esplicita grazie alla relazione:

$$\nu(B) = \mu(\theta^{-1}B) \quad \forall B \in \mathcal{A}(\Theta) ,$$

dove  $\theta^{-1}B = \{g \in G / g\theta \in B\}$ .

Poiché infatti la misura  $\mu$  è right-invariante, la misura  $\nu$  definita dalla precedente relazione non dipende dalla scelta di  $\theta$  (se  $\theta_1 = g_1\theta$ , si ha  $\theta_1^{-1}B = \{g / gg_1\theta \in B\} = (\theta^{-1}B)g_1^{-1}$ ), inoltre l'invarianza di  $\nu$  è garantita dalla left-invarianza di  $\mu$ .

La richiesta che  $G_0$  sia compatto serve invece ad evitare che la misura  $\mu(\theta^{-1}B)$  diverga.

D'ora in poi, per semplicità di notazione, si indicherà con  $dg$  la misura  $\mu$  invariante su  $G$ , mentre  $d\theta$  denoterà la misura  $\nu$  invariante su  $\Theta$  da essa indotta.

Infine, per specificare l'azione di un gruppo  $G$  sull'insieme degli stati di un sistema quantistico è necessario rappresentare  $G$  nello spazio di Hilbert opportuno: un particolare tipo di rappresentazione, introdotto in [23], è quello descritto dalla seguente

**Definizione 2.2.9** *Si dice rappresentazione unitaria proiettiva ( o semplicemente proiettiva) di un gruppo  $G$  sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  una mappa  $U$  che manda ogni elemento  $g$  di  $G$  in un operatore unitario  $U_g$  su  $\mathcal{H}$  in modo che sia:*

- $U_{g_1}U_{g_2} = \omega(g_1, g_2)U_{g_1g_2}$  , dove  $\omega(g_1, g_2)$  è un fattore di modulo 1 detto cociclo
- $\omega(g_1, g_2g_3)\omega(g_2, g_3) = \omega(g_1, g_2)\omega(g_1g_2, g_3)$
- $\omega(g, g^{-1}) = 1$  .

## 2.2.2 Set covarianti di stati

**Definizione 2.2.10** *Sia  $G$  un gruppo di Lie che agisce transitivamente su di una varietà  $\Theta$ , e sia  $U$  una rappresentazione proiettiva del gruppo  $G$  su*

uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Si dice set covariante un set parametrico di stati  $\{\rho_\theta / \theta \in \Theta\}$  che soddisfa:

$$\rho_{g\theta} = U_g \rho_\theta U_g^\dagger \quad \forall g \in G, \forall \theta \in \Theta .$$

In pratica, fissato un certo stato di partenza  $\rho_{\theta_0}$ , un set di questo tipo rappresenta l'orbita descritta da  $\rho_{\theta_0}$  sotto l'azione del gruppo  $G$ : da questo punto di vista diventa subito chiaro il significato fisico della definizione (2.2.10).

Per esempio, nel caso del gruppo delle rotazioni in tre dimensioni, un set covariante deve contenere tutti gli stati ottenibili da un suo qualsiasi elemento tramite rotazione.

Il problema di stima su set covarianti di stati può essere raffigurato quindi secondo la seguente rappresentazione schematica: inizialmente il sistema si trova nello stato  $\rho_{\theta_0}$ , dopodiché esso passa attraverso una macchina che realizza, tramite una qualche interazione, una trasformazione unitaria  $U_g$ ; lo sperimentatore, infine, deve escogitare una misura che gli permetta di stimare, nel modo migliore consentito dalla teoria della misura quantistica, lo stato in output.

La considerazione del particolare significato fisico attribuibile ai set covarianti suggerisce in maniera naturale di fare, prima di tutto, una selezione nell'insieme delle possibili misure candidate alla stima: tale selezione consiste nel limitare l'attenzione soltanto alle cosiddette *misure covarianti*, cioè a quelle misure  $\mu$  definite su  $\Theta$  per le quali vale:

$$\mu_{gS}(gB) = \mu_S(B) \quad \forall B \in \mathcal{A}(\Theta)$$

dove, per semplicità di notazione, si sono indicati con  $S$  e  $gS$ , rispettivamente, gli stati  $\rho_\theta$  e  $\rho_{g\theta}$  ( $\rho_\theta$  è un qualsiasi stato appartenente al set covariante). Il significato di questa condizione è chiaro: se si applica la trasformazione  $g$  ad uno stato, la corrispondente distribuzione di probabilità su  $\Theta$  deve subire la stessa trasformazione.

Se, per esempio, il sistema viene traslato in una direzione dello spazio, allora anche la sua distribuzione di probabilità in posizione subirà la stessa traslazione.

Un ulteriore argomento a favore della scelta di misure covarianti è poi dato dal seguente

**Teorema 2.2.1** *Se, in un problema di stima quantistica del tipo descritto, il gruppo  $G$  e la varietà  $\Theta$  sono compatti, allora, fissato un certo costo invariante, esiste una misura ottima sia dal punto di vista dell'approccio bayesiano che di quello minimax. Tale misura è covariante.*

Per la dimostrazione si rimanda a [6].

La richiesta di covarianza delle misure si traduce nel formalismo delle POVM nella richiesta di *POVM covarianti*: tali POVM godono di particolari proprietà che permettono di impostare in maniera particolarmente semplice il problema della stima.

### 2.2.3 POVM covarianti

**Definizione 2.2.11** *Si dice che una POVM  $E$ , definita su  $\mathcal{A}(\Theta)$  è covariante rispetto a  $G$ , se verifica*

$$\text{Tr}[\rho_{g\theta}E(gB)] = \text{Tr}[\rho_{\theta}E(B)] \quad \forall B \in \mathcal{A}(\Theta) ,$$

dove  $\rho_{\theta}$  è un qualsiasi stato di un set covariante.

La prima importante proprietà delle POVM su  $\mathcal{A}(\Theta)$  covarianti per  $G$ , dimostrata in [6], è che a ciascuna di esse si può sempre associare una densità operatoriale  $M(\theta)$ , in modo che valga la relazione:

$$E(B) = \int_B d\theta M(\theta) .$$

Tale densità operatoriale possiede inoltre una forma particolarmente semplice: fissato un certo  $\theta_0$  vale

$$M(g\theta_0) = U_g P_0 U_g^\dagger \quad \forall g \in G , \quad (2.4)$$

dove  $P_0$  è un operatore positivo, comunemente detto “*seed*” della POVM.

In definitiva, per POVM covarianti, si ha:

$$\begin{aligned} E(B) &= \int_B M(\theta) d\theta \\ &= \int_{\theta_0^{-1}B} U_g P_0 U_g^\dagger dg \quad \forall B \in \mathcal{A}(\Theta) \end{aligned}$$

(dove, come di consueto, con  $\theta_0^{-1}B$  si intende la controimmagine  $\{g / g\theta_0 \in B\}$  dell'insieme  $B$ ).

La condizione  $E(\Theta) = 1$ , che dà la normalizzazione della POVM, diventa allora:

$$\int_G U_g P_0 U_g^\dagger dg = 1 \quad (2.5)$$

(poiché  $\theta_0^{-1}\Theta = G$ )

Per fare un esempio concreto si può considerare il gruppo  $\mathbb{T}$  delle traslazioni lungo l'asse  $x$  di un riferimento cartesiano, applicato ad un sistema quantistico descritto dallo spazio di Hilbert  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ : in questo spazio, a  $\mathbb{T}$  è associata una rappresentazione unitaria, data dagli operatori  $\{U_x = e^{iPx} / x \in \mathbb{R}\}$ , dove  $P$  è l'operatore momento del sistema e  $x$  è il parametro che specifica modulo e verso di ciascuna traslazione.

Ad una POVM covariante per la misura del parametro  $x$  sarà associata una densità della forma

$$M(x) = e^{iPx} P_0 e^{-iPx}$$

Si può notare che, con la scelta  $P_0 = |0\rangle\langle 0|$  (dove  $|0\rangle$  indica l'autovettore improprio dell'operatore posizione  $X$  corrispondente all'autovalore 0) si ottiene  $M(x) = |x\rangle\langle x|$ , cioè la misura descritta è proprio l'ordinaria misura della posizione del sistema.

Si può notare che, in questo caso, la condizione di normalizzazione dalla POVM è soddisfatta, visto che

$$\int_{\mathbb{R}} dx |x\rangle\langle x| = \mathbb{I}.$$

## 2.2.4 Il problema della stima nel caso covariante

Come già preannunciato, nel caso covariante è possibile dare una formulazione particolarmente semplice del problema della stima.

Si consideri dunque un gruppo  $G$  unimodulare che agisca transitivamente su di una varietà  $\Theta$ , alla quale è associato il set covariante di stati  $\{\rho_\theta / \theta \in \Theta\}$ . Per semplicità assumiamo che il gruppo  $G$ , la varietà  $\Theta$  e il sottogruppo stazionario  $G_0$  siano compatti<sup>7</sup>.

L'azione del gruppo  $G$  sullo spazio di Hilbert relativo al sistema considerato sia descritta da una rappresentazione proiettiva  $U_g$ .

Si considerino misure covarianti rispetto a  $G$ , alle quali sono associate delle POVM con densità operatoriale covariante rispetto alla rappresentazione  $U_g$ , secondo la (2.4) della precedente sezione.

Chiamati  $g$  e  $g^*$  gli elementi di  $G$  tali che  $\theta = g\theta_0$  e  $\theta^* = g^*\theta_0$ , l'espressione

---

<sup>7</sup>In realtà, per la validità di quanto segue, è necessario soltanto che esistano una misura invariante  $dg$  su  $G$  e una misura  $d\theta$  su  $\Theta$  che soddisfi la relazione:

$$\int_B d\theta = \int_{\theta_0^{-1}B} dg,$$

dove  $\theta_0^{-1}B = \{g / g\theta_0 \in B\}$ .

per la densità di probabilità condizionata di ottenere il valore  $\theta^*$  quando il valore vero è  $\theta$  diventa:

$$\begin{aligned}
p(\theta^*|\theta) &= p(g^*\theta_0|g\theta_0) \\
&= \text{Tr}[\rho_{g\theta_0} M(g^*\theta_0)] \\
&= \text{Tr}[(U_g \rho_0 U_g^\dagger) (U_{g^*} P_0 U_{g^*}^\dagger)] \\
&= \text{Tr}[\rho_0 (U_{g^{-1}g^*} P_0 U_{g^{-1}g^*}^\dagger)] \\
&= p(g^{-1}g^*\theta_0|\theta_0) ,
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che  $U$  è una rappresentazione proiettiva, e quindi si ha  $U_g^\dagger = U_{g^{-1}}$  e anche  $U_{g^{-1}}U_{g^*} = U_{g^{-1}g^*} \omega(g^{-1}, g^*)$ .

Questa relazione esprime l'invarianza della distribuzione di probabilità  $p(\theta^*|\theta)$ : infatti, confrontando il secondo e l'ultimo termine di questa catena di uguaglianze e ricordando che il parametro  $\theta_0$  è arbitrario, tale relazione può essere riscritta come

$$p(g\theta^*|g\theta) = p(\theta^*|\theta) . \quad (2.6)$$

Detto in altre parole, la covarianza implica che la densità di probabilità di ottenere il valore  $g^*\theta_0$  quando il valore vero è  $g\theta_0$  dipenda soltanto dal prodotto  $g^{-1}g^*$  e non da  $g^*$  o da  $g$  separatamente.

Nel caso di misure covarianti è inoltre ragionevole richiedere che anche la funzione costo  $c(\theta, \theta^*)$  sia invariante, e quindi che dipenda anch'essa unicamente dal prodotto  $g^{-1}g^*$ .

Il significato di questa assunzione può essere chiarito considerando un caso particolare, come, ad esempio quello, a cui già si era accennato, del gruppo delle traslazioni.

In questo caso le funzioni invarianti sono quelle che dipendono solamente dalla differenza  $x^* - x$ : tipiche funzioni costo invarianti sono, per esempio  $|x^* - x|$ ,  $(x^* - x)^2$ , o anche, formalmente parlando,  $-\delta(x^* - x)$ .

Poiché sia la densità di probabilità condizionata che la funzione costo sono invarianti, si ottiene che il costo  $c(\theta)$  della misura sullo stato  $\rho_\theta$ , ottenuto dalla media dei costi su tutti i possibili risultati  $\theta^*$ , in realtà non dipende da  $\theta$ .

Infatti

$$\begin{aligned}
c(\theta) &= \int_{\Theta} d\theta^* c(\theta^*, \theta) p(\theta^*|\theta) \\
&= \int_G dg^* c(g^{-1}g^*) p(g^{-1}g^*) \\
&= \int_G d(g^{-1}g^*) c(g^{-1}g^*) p(g^{-1}g^*) \\
&= \int_G dg c(g) p(g) \\
&= c .
\end{aligned}$$

Questo significa che la POVM che minimizza  $c(\theta)$  per un certo valore del parametro  $\theta$ , minimizza anche  $c(\theta')$  per qualsiasi altro valore  $\theta'$ .

Come conseguenza di questo fatto si ha che gli approcci *bayesiano* e *minimax*, di cui si era parlato nella formulazione generale del problema della stima, coincidono nel caso covariante: visto che i  $c(\theta)$  sono tutti uguali a  $c$ , evidentemente il valore massimo e il valore medio sono uguali ed entrambi pari a  $c$ .

In definitiva, il problema della ricerca della POVM ottima covariante per gruppi  $G$  compatti e varietà  $\Theta$  compatte viene ridotto a quello della ricerca dell'operatore positivo  $P_0$  che minimizza il funzionale affine  $\mathcal{C}$  definito da:

$$\mathcal{C} [P_0] = \int_G dg c(g) \text{Tr}[\rho_0(U_g P_0 U_g^\dagger)] , \quad (2.7)$$

con il vincolo, derivante dalla condizione di normalizzazione della POVM,

$$\int_G dg U_g P_0 U_g^\dagger = \mathbb{I} . \quad (2.8)$$

Come già si era potuto notare, l'insieme degli operatori positivi che soddisfano il vincolo (2.8) è un convesso, quindi gli operatori che minimizzano il funzionale affine  $\mathcal{C}$  corrisponderanno a punti estremali di quest'insieme.

Infine, si può notare la forma particolare assunta dal problema nel caso in cui si assume come criterio di merito quello della *massima verosimiglianza* (o *maximum likelihood*): questo corrisponde alla scelta della “funzione” costo della forma  $c(g) = -\delta(g)$ , dove con  $\delta(g)$  si intende il funzionale definito su

ogni funzione  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ , liscia in un intorno dell'identità  $id \in G$ , dalla relazione

$$\begin{aligned} \delta [f] &\doteq \int_G dg \delta(g) f(g) \\ &\doteq f(id) . \end{aligned}$$

In tal caso il problema si riduce a quello di minimizzare il funzionale:

$$\mathcal{C} [P_0] = - \text{Tr}[\rho_0 P_0] = c , \quad (2.9)$$

sotto il vincolo (2.8).

È utile ricordare che l'opposto di  $c$  ha il significato di *densità di probabilità* di ottenere, come valore misurato, il valore vero: per questa ragione  $-c$  viene spesso detto *likelihood* della misura.

Come si potrà vedere in seguito, l'approccio qui descritto consentirà in molti casi una notevole semplificazione nel problema della ricerca della POVM ottima, consentendo così di darne un'espressione esplicita.

Inoltre, in alcune situazioni, si potrà mostrare che la POVM ottima in base al criterio ML è anche ottima per una classe abbastanza ampia di costi, in cui sono contenuti praticamente tutti i costi fisicamente più significativi.



# Capitolo 3

## Esempi di misure covarianti

### 3.1 La misura della fase

Come si è già sottolineato nei precedenti capitoli, possono esistere delle variabili fisiche associate ad un sistema quantistico che non sono descrivibili in maniera standard tramite qualche osservabile.

In questi casi è necessario valorizzare il formalismo delle POVM e cercare mediante la teoria quantistica della stima quelle che meglio soddisfano qualche requisito di merito.

Un esempio significativo a questo proposito è quello legato alla misura della fase: tale esempio verrà affrontato per gradi, partendo dal caso di un oscillatore armonico e poi generalizzando la definizione a generici hamiltoniani con spettro discreto.

Infine verranno presi in considerazione due schemi di misura di fase su copie multiple, uno in dimensione finita e l'altro in dimensione infinita.

#### 3.1.1 La fase di un oscillatore armonico

In meccanica classica è sempre possibile definire, per qualsiasi sistema la cui dinamica sia periodica, una *fase* associata allo stato del sistema.

Come noto, nel caso in cui l'evoluzione periodica di una variabile  $q$  abbia la forma di moto armonico ciò può essere fatto semplicemente associando al moto un'ampiezza  $q_0$ , che corrisponde al modulo del massimo valore assunto da  $q$ , e definendo, ad ogni istante, la fase  $\varphi(t)$  tramite la relazione:

$$q(t) = q_0 \cos(\varphi(t)) , \quad (3.1)$$

oppure, introducendo la notazione complessa, tramite la relazione

$$q(t) = q_0 e^{i\varphi(t)} . \quad (3.2)$$

Se si adotta la notazione complessa, il contributo all'energia dovuto al grado di libertà descritto dalla variabile  $q$  diventa

$$E = q^* q ,$$

in unità  $\frac{m\omega^2}{2}$ .

Nel caso di un oscillatore armonico quantistico tutto questo non può essere fatto in maniera così immediata.

Infatti, se adottiamo il formalismo algebrico che fa uso dei cosiddetti operatori di creazione e distruzione, l'hamiltoniano che governa la dinamica del sistema è

$$H = a^\dagger a = N$$

(in unità  $\hbar\omega$  e a meno di uno shift del livello zero dell'energia) e gli operatori  $a$  e  $a^\dagger$  diventano l'analogo quantistico della grandezza vibrante  $q$  della meccanica classica.

Si può cercare di definire la fase dell'oscillatore mediante un analogo della relazione (3.2), cioè ponendo:

$$a = P|a| \tag{3.3}$$

dove  $P$  è un operatore che soddisfi la condizione di isometria  $P^\dagger P = \mathbb{I}$ .

In questo modo  $|a|^2 = N$ , cioè  $|a| = \sqrt{N}$  e quindi si ottiene:

$$P = \sum_{n=1}^{+\infty} |n-1\rangle\langle n| \quad \text{e anche} \tag{3.4}$$

$$P^\dagger = \sum_{n=0}^{+\infty} |n+1\rangle\langle n| . \tag{3.5}$$

$$\tag{3.6}$$

Bisogna però notare che l'operatore  $P$  non è riconducibile in nessun modo a qualche osservabile ordinaria:  $P$  non è un operatore unitario<sup>1</sup> e quindi non possiede una risoluzione spettrale ortogonale  $\{|\varphi\rangle / \varphi \in [0, 2\pi)\}$ , tale che:

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} |\varphi\rangle\langle\varphi| . \tag{3.7}$$

In definitiva, la mancanza di una tale risoluzione spettrale impedisce di associare un operatore autoaggiunto alla misura della fase<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Esso infatti non è invertibile: poiché  $V|0\rangle = 0$ , si ha che  $\text{Ker}(V) \neq 0$ .

<sup>2</sup>Come noto, ad ogni operatore unitario  $U$  è associata, grazie al teorema spettrale per operatori unitari [9], un'unica risoluzione ortogonale dell'identità  $E(\varphi)$ , tale che

$$U = \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} dE(\varphi) ,$$

Inoltre, se ci fosse un'ossevabile  $F$  associata alla misura della fase, per come è fatta l'espressione dell'Hamiltoniano di oscillatore armonico,  $F$  dovrebbe essere canonicamente coniugata all'operatore numero  $N$  (si veda [24]): dovrebbe cioè valere

$$[F, N] = i ,$$

o meglio<sup>3</sup>

$$e^{i\varphi N} e^{i\theta F} e^{-i\varphi N} = e^{-i\varphi\theta} e^{i\theta F} \quad \forall \varphi, \theta . \quad (3.8)$$

Un'ossevabile  $F$  di questo tipo non può però esistere: per il teorema di Stone e von Neumann dovrebbe esistere un isomorfismo che manda gli operatori  $F$  e  $N$  rispettivamente in  $X$  e  $P$ , ma questo non è possibile poiché  $N$  è inferiormente limitato, mentre  $P$  non lo è (per maggiori dettagli si vedano [25, 26]).

Sebbene non sia possibile trovare un operatore autoaggiunto  $F$  con  $P = e^{iF}$  che sia canonicamente coniugato a  $N$ , si può comunque osservare che l'operatore  $P$  introdotto prima soddisfa una relazione analoga a (3.8):

$$e^{i\varphi N} P^k e^{-i\varphi N} = e^{-ik\varphi} P \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Vale quindi una forma più debole di coniugazione, come si potrà osservare in quanto segue, questa forma è quella compatibile con la covarianza delle POVM per la misura della fase.

---

dove l'integrale a secondo membro va inteso come integrale di Stieltis operatoriale (per una trattazione dettagliata di questi integrali si vedano [9, 14]).

Si può quindi introdurre l'operatore autoaggiunto

$$A = \int_0^{2\pi} \varphi \, dE(\varphi) ,$$

tale che  $U = e^{iA}$ .

In letteratura è uso comune quello di scrivere le precedenti relazioni in notazione di Dirac: introdotto il set di autovettori impropri  $\{|\varphi\rangle / \varphi \in [0, 2\pi)\}$  si sostituisce  $dE(\varphi)$  con  $|\varphi\rangle\langle\varphi| \frac{d\varphi}{2\pi}$ , così da avere

$$U = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} |\varphi\rangle\langle\varphi| ,$$

e anche

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \varphi |\varphi\rangle\langle\varphi| .$$

È bene ricordare però che la notazione di Dirac ha senso solo in quei casi in cui è possibile introdurre una densità operatoriale, cioè nei casi in cui  $E(\varphi)$  è assolutamente continua.

<sup>3</sup>La relazione  $[F, N] = i$  può valere solo nell'intersezione dei domini di  $FN$  e  $NF$ , mentre, essendo  $e^{i\varphi F}$  e  $e^{i\theta N}$  ovunque definiti, la corrispondente relazione di coniugazione non comporta nessun problema di dominio.

### 3.1.2 La misura di fase ottimale per un oscillatore armonico

Non essendo praticabile l'approccio standard per la misura della fase di un oscillatore bisogna allora prendere in considerazione misure generalizzate e quindi anche POVM non necessariamente proiettive.

Si consideri dunque il seguente problema di stima covariante: sia  $G$  il gruppo di Lie degli shift di fase, rappresentato unitariamente in  $\mathcal{H}$  dagli operatori  $\{U_\phi / \phi \in \mathbb{R}\}$ , con  $U_\phi = e^{-iN\phi}$ .

Il gruppo  $G$  è diffeomorfo alla varietà  $\Phi$  definita da  $\Phi = \mathbb{R} \pmod{2\pi}$ , cioè all'intervallo  $[0, 2\pi)$  con la compattificazione  $0 \sim 2\pi$ , e quindi, in definitiva, alla circonferenza unitaria  $\mathbb{S}^1$ .

Su di esso si può definire la misura invariante normalizzata  $\mu(d\varphi) \doteq \frac{d\varphi}{2\pi}$ .

Dato uno stato puro  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , si consideri l'orbita descritta da  $|\psi\rangle$  sotto l'azione di  $G$ : se  $|\psi\rangle$  non è uno stato numero, tale orbita costituisce un set covariante in corrispondenza biunivoca con la circonferenza unitaria<sup>4</sup>.

Infatti, poiché gli elementi  $\{U_{g_o}\}$  del sottogruppo stazionario sono definiti dalla relazione  $U_{g_o}|\psi\rangle = e^{i\varphi}|\psi\rangle$  (dove  $\varphi$  è una qualsiasi fase), se  $|\psi\rangle$  non è uno stato numero non può essere un autovettore di  $U_{g_o}$ : il sottogruppo stazionario è quindi banale e gli elementi del set sono in corrispondenza biunivoca con quelli del gruppo.

Nel caso  $|\psi\rangle = |n\rangle$  per qualche  $n$ , invece,  $G_0 = G$  e l'orbita si riduce ad un unico punto.

Come già visto nel precedente capitolo, una prima selezione fra tutte le possibili misure del parametro  $\varphi$  può essere fatta considerando soltanto misure covarianti per shift di fase, cioè misure descritte da POVM che verificano:

$$U_\varphi^\dagger E(B_\varphi) U_\varphi = E(B) \quad \forall B \in \mathcal{A}(\Phi) ,$$

dove  $B_\varphi = \{\theta + \varphi / \theta \in B\}$ .

Tale selezione è motivata dal significato fisico del parametro  $\varphi$ , nonché dal teorema (2.2.1): essendo compatti sia il gruppo  $G$  che la varietà dei parametri su cui agisce  $G$ , qualunque sia il criterio di merito scelto, è sempre possibile trovare una POVM ottimale che sia covariante.

Poiché  $E$  è covariante si può introdurre la densità operatoriale  $P(\varphi) = U_\varphi \xi U_\varphi^\dagger$ , in modo che

$$E(B) = \int_B \frac{d\varphi}{2\pi} P(\varphi) \quad \forall B \in \mathcal{A}(\Phi) ,$$

<sup>4</sup>Il set covariante  $\{\rho_\varphi = |\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi| / \varphi \in [0, 2\pi)\}$  viene anche detto *classe di Hardy* per la circonferenza unitaria.

dove il *seed*  $\xi$  deve essere un operatore positivo che soddisfa il vincolo di completezza della POVM

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} U_\varphi \xi U_\varphi^\dagger = \mathbb{I} .$$

È facile mostrare che questo vincolo equivale alla richiesta

$$\xi_{nn} = 1 \quad \forall n , \quad (3.9)$$

dove  $\{\xi_{nn}\}$  sono gli elementi di matrice diagonali di  $\xi$ .

Nel caso della fase le funzioni costo  $c(\varphi^*, \varphi)$  invarianti sono quelle che dipendono soltanto dalla differenza  $\varphi^* - \varphi$  fra il valore stimato e quello vero. Inoltre, è naturale assumere che  $c$  sia una funzione periodica con periodo  $2\pi$  e pari nella differenza  $\varphi^* - \varphi$ .

Poiché il problema è covariante, è indifferente cercare la misura che minimizza il costo  $\mathcal{C}(\varphi) [\xi] = \int_\varphi d\varphi^* c(\varphi^* - \varphi) \langle \psi_\varphi | P(\varphi^*) | \psi_\varphi \rangle$  per qualche valore di  $\varphi$  o il costo massimo o anche il costo medio rispetto ad una qualsiasi distribuzione di probabilità a priori del parametro  $\varphi$ .

Cerchiamo quindi, per esempio, la POVM che minimizza il funzionale costo  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0)$ .

Si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} [\xi] &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi^*}{2\pi} c(\varphi^*) \text{Tr}[\rho_0 U_{\varphi^*}^\dagger \xi U_{\varphi^*}] \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi^*}{2\pi} c(\varphi^*) \langle \psi | U_{\varphi^*}^\dagger \xi U_{\varphi^*} | \psi \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi^*}{2\pi} c(\varphi^*) \left( \sum_{m,n=0}^{+\infty} \langle \psi | m \rangle \xi_{mn} \langle n | \psi \rangle e^{i(m-n)\varphi^*} \right) \\ &= \sum_{m,n=0}^{+\infty} c_{(n-m)} \psi_m^* \psi_n \xi_{mn} , \end{aligned}$$

dove si è posto

$$c_k = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-ik\varphi} c(\varphi) ,$$

cioè

$$c(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\varphi} .$$

Poiché si è assunto che  $c$  è una funzione pari di  $\varphi$ , deve essere  $c_k = c_{-k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ , cioè la funzione costo contiene nel suo sviluppo di Fourier solo termini pari:

$$c(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\varphi) ,$$

dove, ora,  $a_k = 2c_k$  per  $k \geq 1$  e  $a_0 = c_0$ .

Scritto in funzione delle componenti di Fourier  $\{a_k\}$ , il costo  $\mathcal{C}[\xi]$  della misura diventa

$$\mathcal{C}[\xi] = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2} \left( \sum_{|m-n|=k} \psi_m^* \psi_n \langle m|\xi|n \rangle \right) ,$$

dove, per la parte a frequenza nulla, si è usata la relazione

$$\langle m|\xi|m \rangle = 1 \quad \forall m ,$$

implicata dal vincolo di completezza (3.9).

A questo punto, il problema della ricerca dell'operatore positivo  $\xi$  che rende minimo il funzionale  $\mathcal{C}$  può essere risolto in maniera semplice per una classe molto ampia di funzioni costo, anche nota come *classe di Holevo* (introdotta in [6]).

Tale classe è composta dalle funzioni pari per le quali vale  $a_j \leq 0 \quad \forall j \geq 1$ . Quasi tutte le principali funzioni costo di interesse fisico appartengono alla classe di Holevo, per esempio:

$$4 \sin \frac{\varphi^2}{2} = 2(1 - \cos \varphi) \quad (3.10)$$

$$\min \{ \varphi, 2\pi - \varphi \} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos [(2k+1)\varphi]}{(2k+1)^2} , \quad (3.11)$$

$$\left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos k\varphi}{4k^2 - 1} , \quad (3.12)$$

$$-|\langle \psi|U_\varphi|\psi \rangle|^2 = -\sum_{l=0}^{+\infty} |\psi_l|^4 - \sum_{k=1}^{+\infty} \left( \sum_{l=0}^{+\infty} |\psi_l \psi_{l+k}|^2 \right) \cos k\varphi , \quad (3.13)$$

e anche, ragionando formalmente,

$$-\delta_{2\pi}(\varphi) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \cos k\varphi \quad (3.14)$$

La scelta di una delta di Dirac con periodo  $2\pi$  (detta anche *Dirac comb*) come costo equivale, come già visto in precedenza, a scegliere come criterio di merito quello corrispondente all'approccio maximum likelihood, cosicché il problema di stima si riduce alla ricerca della POVM che massimizza la densità di probabilità di misurare il valore vero.

La funzione (3.10) corrisponde invece, per piccoli  $\varphi$ , ad una versione periodicizzata del criterio dei minimi quadrati: infatti

$$4 \sin \frac{\varphi^2}{2} \simeq \varphi^2 \quad \text{per } \varphi \simeq 0 .$$

Bisogna tuttavia notare che la funzione  $\varphi_{2\pi}^2$ , corrispondente ad un approccio esatto di minimi quadrati periodicizzati (consistente nella ricerca di quelle misure che minimizzano la dispersione dei risultati attorno al valore medio), non appartiene alla classe di Holevo a causa dei segni alterni presenti nel suo sviluppo di Fourier:

$$\varphi_{2\pi}^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-)^k \frac{4}{k^2} \cos k\varphi$$

Anche la funzione (3.13) ha un particolare significato fisico: dati due stati puri  $|\psi\rangle$  e  $|\varphi\rangle$ , la quantità  $F = |\langle\psi|\varphi\rangle|^2$  rappresenta un indice di quanto essi siano distinguibili<sup>5</sup> ed è nota in teoria dell'informazione quantistica come *fidelity*<sup>6</sup>.

La funzione costo considerata è quindi l'opposto della fidelity fra lo stato

---

<sup>5</sup>La quantità  $F$  infatti assume valori nell'intervallo  $[0,1]$  ed è massima se i due stati considerati coincidono (a meno di una fase globale) mentre è minima se sono ortogonali. Bisogna tuttavia osservare che  $F$  non costituisce una distanza nello spazio di Hilbert nel senso proprio del termine: una distanza vera e propria fra due stati generici  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , legata ad  $F$ , è la cosiddetta *distanza di Bures*, definita da

$$b(\rho_1, \rho_2) = \left[ 1 - \left( \text{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} :$$

se  $\rho_1$  e  $\rho_2$  sono puri, si ha infatti

$$b(\rho_1, \rho_2) = \left[ 1 - \sqrt{F} \right]^{\frac{1}{2}} .$$

<sup>6</sup>Il nome "fidelity" è dovuto all'importanza della quantità  $F$  nel problema del *cloning*: tale problema consiste nel trovare quelle trasformazioni quantistiche che portano ad avere, da uno stato di partenza, un certo numero di copie il più possibile "fedeli".

La fidelity costituisce inoltre un parametro significativo anche nell'ambito della crittografia quantistica.

“vero”  $|\psi\rangle$  e lo stato “stimato”  $U_\varphi|\psi\rangle$ .

Per la classe di funzioni costo considerata è stato dimostrato in [6] un importante risultato, dato dal seguente

**Teorema 3.1.1** *Nel problema di stima covariante della fase di un oscillatore armonico quantistico su stati puri, esiste un'unica POVM ottimale per tutte le funzioni costo appartenenti alla classe di Holevo.*

*Se lo stato che genera il set covariante è*

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n |n\rangle ,$$

*allora l'operatore positivo  $\xi$  che genera la densità operatoriale associata alla POVM è*

$$\xi = \sum_{m,n=0}^{+\infty} e^{i(\theta_m - \theta_n)} |m\rangle \langle n| ,$$

*dove le fasi  $\{\theta_n\}$  sono quelle associate ai coefficienti dello sviluppo di  $|\psi\rangle$ , definite dalla relazione:*

$$\psi_n = e^{i\theta_n} |\psi_n| .$$

**Dim.** Poiché per ogni  $k \geq 1$  vale  $a_k \leq 0$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{C} [\xi] &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2} \left( \sum_{|m-n|=k} \psi_m^* \psi_n \langle m|\xi|n\rangle \right) \\ &\geq a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2} \left( \sum_{|m-n|=k} |\psi_m| |\psi_n| |\langle m|\xi|n\rangle| \right) , \end{aligned}$$

dove il segno di eguaglianza vale se e solo se

$$\xi_{mn} = e^{i(\theta_m - \theta_n)} |\langle m|\xi|n\rangle| . \quad (3.15)$$

La positività di  $\xi$  impone però che sia

$$|\xi_{mn}| \leq \sqrt{\xi_{mm}\xi_{nn}} \quad \forall m, n ,$$

come si ottiene applicando la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz ai vettori  $\sqrt{\xi}|m\rangle$  e  $\sqrt{\xi}|n\rangle$ .

Usando poi il fatto che  $\xi_{mm} = 1 \quad \forall n$ , derivante dalla completezza (3.9), si ha che  $|\xi_{mn}| \leq 1$ .

Quindi vale anche

$$\mathcal{C}[\xi] \geq a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2} \left( \sum_{|m-n|=k} |\psi_m| |\psi_n| \right),$$

espressione che fissa un limite inferiore al costo delle POVM covarianti per il problema della misura di fase.

L'uguaglianza viene raggiunta se e solo se, oltre alla (3.15), vale anche

$$|\xi_{mn}| = 1 \quad \forall m, n. \quad (3.16)$$

È opportuno ricordare che la relazione  $|\xi_{mn}| \leq 1 \quad \forall m, n$  costituisce una condizione necessaria ma non sufficiente per la positività di  $\xi$ : il requisito di positività andrà quindi verificato a posteriori, una volta individuato un possibile candidato alla soluzione del problema.

Consideriamo dunque l'unico operatore  $\xi$  che soddisfa entrambe le condizioni (3.15) e (3.16): cioè l'operatore definito dalla relazione

$$\xi_{mn} = e^{i(\theta_m - \theta_n)} \quad \forall m, n.$$

Chiaramente tale operatore minimizza il funzionale  $\mathcal{C}$ , inoltre è positivo, essendo

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{m,n} e^{i(\theta_m - \theta_n)} |m\rangle \langle n| = \\ &= |\chi\rangle \langle \chi|, \end{aligned}$$

dove si è introdotto il "vettore" non normalizzabile

$$|\chi\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\theta_n} |n\rangle.$$

L'operatore  $\xi$  fornisce quindi la POVM covariante associata alla misura della fase ottimale per tutte le funzioni costo della classe di Holevo. ■

### Osservazioni

- La POVM ottenuta può essere scritta (in forma differenziale) come

$$dE(\varphi) = \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-iN\varphi} |\chi\rangle \langle \chi| e^{iN\varphi},$$

da cui è evidente la sua non ortogonalità<sup>7</sup>.

- È utile ricordare che anche la misura di fase qui costruita non permette di distinguere fra vettori dello spazio di Hilbert che differiscano soltanto per una fase globale: infatti, nel caso in cui  $|\psi\rangle = |n\rangle$  per un certo valore di  $n$ , si ha che la densità di probabilità di misurare lo shift  $\varphi$  è uniforme:  $dp(\varphi, 0) = \frac{d\varphi}{2\pi}$ , cioè la misura non è significativa.
- Nel caso in cui le ampiezze di probabilità  $\{\psi_n\}$  dello stato  $|\psi\rangle$  che genera il set covariante abbiano tutte la stessa fase (cioè  $\theta_n = \theta \quad \forall n$ ), si ha  $|\chi\rangle = e^{i\theta}|e(0)\rangle$  e

$$dE(\varphi) = \frac{d\varphi}{2\pi} |e(\varphi)\rangle \langle e(\varphi)| ,$$

dove

$$|e(\varphi)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\varphi} |n\rangle .$$

I vettori non normalizzabili  $\{|e(\varphi)\rangle\}$ , introdotti in [4], sono comunemente detti *stati della rappresentazione di Susskind-Glogower*.

È interessante notare che, in questo caso

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} dE(\varphi) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\varphi} |e(\varphi)\rangle \langle e(\varphi)| = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} |n-1\rangle \langle n| = \\ &= P , \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\varphi} dE(\varphi) = P^\dagger$$

Cioè il set di Susskind-Glogower costituisce una risoluzione non ortogonale dell'identità che permette di rappresentare l'operatore isometrico  $P$  e il suo aggiunto  $P^\dagger$ , associati alla fase tramite l'analogia classica descritta all'inizio del capitolo.

---

<sup>7</sup>Non vale infatti  $E(B_1)E(B_2) = E(B_1 \cap B_2)$ , come si può osservare prendendo due intervalli  $B_1$  e  $B_2$  con supporti disgiunti.

- Nel caso in cui le ampiezze  $\{\psi_n\}$  abbiano fasi diverse  $\{\theta_n\}$ , la semplice misura con il set di Susskind-Glogower non è più ottimale (in pratica, perché non tiene in conto l'informazione contenuta nelle fasi  $\{\theta_n\}$  dello stato di partenza): per avere la misura ottimale bisogna introdurre la trasformazione unitaria  $U$  che opera il cambio di base:

$$U|n\rangle = e^{-i\theta_n}|n\rangle .$$

In questo modo la misura ottimale può essere scritta come

$$dE(\varphi) = \frac{d\varphi}{2\pi} U^\dagger |e(\varphi)\rangle \langle e(\varphi)| U .$$

In definitiva, comunque, tutte le POVM ottime per il problema di stima covariante su stati puri con costi della classe di Holevo sono unitariamente equivalenti alla POVM di Susskind-Glogower.

- È possibile generalizzare l'approccio di Holevo anche a funzioni costo del tipo:

$$c(\varphi) = a_o + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\varphi ,$$

con  $a_k = (-)^{k+1}|a_k|$ .

In questo caso la POVM ottimale è sempre unitariamente equivalente a quella di Susskind-Glogower, con  $U$  definito da

$$U|n\rangle = e^{-i(\theta_n+n\pi)} |n\rangle .$$

### 3.1.3 Definizione generale di fase

Anche in meccanica quantistica, come in meccanica classica, è possibile estendere le considerazioni sulla fase, fatte per un oscillatore armonico, al caso di sistemi qualsiasi la cui dinamica sia periodica.

Il punto di partenza a questo proposito è dato, chiaramente, dalla definizione astratta del *gruppo  $G$  degli spostamenti di fase*, a cui già si era accennato all'inizio del precedente paragrafo:  $G$  è il gruppo di Lie abeliano diffeomorfo al toro  $\mathbb{R}(\text{ mod } 2\pi)$  (cioè, in pratica, alla circonferenza  $\mathbb{S}^1$ ).

In altre parole,  $G$  è isomorfo al gruppo  $U(1)$  degli operatori unitari che agiscono su uno spazio unidimensionale.

Sia  $\mathcal{H}$  lo spazio di Hilbert associato alla descrizione del sistema considerato e sia  $\{U_\varphi / \varphi \in [0, 2\pi)\}$  una rappresentazione unitaria di  $G$  sullo spazio  $\mathcal{H}$ . Dalla teoria dei gruppi si ha che tutte le rappresentazioni irriducibili di  $G$

sono unidimensionali<sup>8</sup> e, quindi, hanno necessariamente la forma  $U_\varphi^{(n)} = e^{in\varphi}$  con  $n$  intero<sup>9</sup>.

Si può allora scrivere la serie di Clebsch-Gordan nella forma simbolica:

$$U_\varphi = \bigoplus_{n \in S} \nu_n e^{in\varphi}$$

dove  $\nu_n$  è la molteplicità con cui compare la rappresentazione ennesima e  $S$  è un certo sottinsieme fissato di  $\mathbb{Z}$ .

Introdotta una base ortonormale di  $\mathcal{H}$  data da  $\{|n_m\rangle / n \in S, m = 1, \dots, \nu_n\}$  in modo che ciascun vettore  $|n_m\rangle$  generi uno degli  $\nu_n$  sottospazi su cui agisce la rappresentazione  $n$ , si ha:

$$U_\varphi = \sum_{n \in S} \sum_{m=1}^{\nu_n} e^{in\varphi} |n_m\rangle \langle n_m| .$$

L'operatore autoaggiunto  $H$  che genera, in accordo col teorema di Stone, la rappresentazione considerata, cioè l'operatore  $H$  per cui vale  $U_\varphi = e^{i\varphi H}$  è quindi dato da

$$H = \sum_{n \in S} \sum_{m=1}^{\nu_n} n |n_m\rangle \langle n_m| . \quad (3.17)$$

Si può notare come lo spettro di  $H$  sia proprio il sottinsieme  $S$  di  $\mathbb{Z}$  che compare nella serie di Clebsch-Gordan.

Se si pensa ad  $H$  come l'hamiltoniano del sistema, questa è la forma più generale possibile per un operatore  $H$  che generi una dinamica periodica, e, in questo senso vale l'analogia classica di cui si parlava all'inizio.

È quindi possibile parlare di "fase" in tutti quei casi in cui l'hamiltoniano del sistema ha per spettro un sottinsieme di  $\mathbb{Z}$ .

Precisamente, dal punto di vista della teoria quantistica della stima, si può dare la seguente

---

<sup>8</sup>Infatti, se  $\{U_\varphi^\mu\}$  è una rappresentazione irriducibile di un gruppo abeliano sul sottospazio invariante  $W$ , a causa del primo lemma di Schur si ha che ogni operatore  $U_\varphi^\mu$  deve essere proporzionale all'identità su  $W$ , ma l'identità non è irriducibile salvo che su sottospazi unidimensionali (per maggiori dettagli si può vedere [21]).

<sup>9</sup>Il fatto che la forma funzionale delle rappresentazioni  $U_\varphi^{(n)}$  sia quella di un esponenziale è dovuto alla commutatività del gruppo di Lie  $G$ : l'esponenziale è l'unica funzione  $f(\varphi)$ , derivabile in  $\varphi = 0$ , che soddisfa le condizioni

$$\begin{cases} f(\varphi_1)f(\varphi_2) &= f(\varphi_1 + \varphi_2) & \forall \varphi_1, \varphi_2 \\ f(0) &= 1 . \end{cases}$$

Il fatto che  $n$  debba essere intero segue poi dalla periodicità modulo  $2\pi$  del gruppo  $G$ .

**Definizione 3.1.1** *Fissato un certo stato  $\rho_0$  di partenza, e considerato il set covariante  $\mathcal{V} = \{\rho_\varphi = U_\varphi \rho_0 U_\varphi^\dagger\}$ , si definisce misura di fase sul set  $\mathcal{V}$ , una qualsiasi misura del parametro  $\varphi$  in  $[0, 2\pi)$ .*

### 3.1.4 La misura di fase ottimale nel caso generale

Una ricca serie di considerazioni sulle misure di fase, originariamente esposte in [27], mostra come sia possibile affrontare il problema della ricerca della POVM covariante ottimale con un metodo simile a quello di Holevo per l'oscillatore armonico anche nel caso di rappresentazioni generiche del gruppo degli shift di fase.

Si consideri innanzitutto il caso in cui le rappresentazioni irriducibili che compaiono nella serie di Clebsch-Gordan abbiano tutte molteplicità 1: gli autospazi del generatore  $H$  considerato non sono degeneri, e quindi si può scrivere:

$$|\psi\rangle = \sum_{n \in S} \psi_n |n\rangle \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} ,$$

dove  $\{|n\rangle\}$  è la base ortonormale degli autovettori di  $H$ .

Se si considera il set covariante ottenuto facendo agire il gruppo  $G$  sullo stato  $\rho_0 = |\psi\rangle\langle\psi|$  e si sceglie un criterio di merito espresso da una certa funzione costo  $c(|\varphi^* - \varphi|)$   $2\pi$ -periodica, il problema della ricerca della POVM ottimale è formalmente analogo a quello per un oscillatore armonico.

Si cerca quindi un operatore positivo  $\xi$  che minimizzi il funzionale costo  $\mathcal{C}$  dato da

$$\mathcal{C} [\xi] = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{m,n \in S} a_{|m-n|} \psi_m^* \psi_n \xi_{mn} ,$$

sotto il vincolo di completezza, ora dato dalla condizione

$$\xi_{nm} = 1 \quad \forall n \in S .$$

La soluzione del problema, per costi nella classe di Holevo, si ottiene facendo le stesse maggiorazioni viste per l'oscillatore armonico, per cui la POVM ottimale si ottiene prendendo

$$\xi = \sum_{m,n \in S} e^{i(\theta_m - \theta_n)} |m\rangle\langle n| .$$

Se si definiscono degli *stati di Susskind-Glogower generalizzati*

$$|e(\varphi)\rangle \doteq \sum_{n \in S} e^{in\varphi} |n\rangle ,$$

si può sempre ricondurre la POVM ottimale  $dE(\varphi)$  alla forma

$$dE(\varphi) = \frac{d\varphi}{2\pi} U |e(\varphi)\rangle \langle e(\varphi)| U^\dagger .$$

A proposito di questa POVM si possono fare due osservazioni:

- Se lo spazio di Hilbert considerato è finitodimensionale, gli stati di Susskind-Glogower sono normalizzabili e la densità di POVM diventa (a meno di equivalenze unitarie):

$$M(\varphi) = d |\tilde{e}(\varphi)\rangle \langle \tilde{e}(\varphi)| , \quad (3.18)$$

dove  $|\tilde{e}(\varphi)\rangle$  sono gli stati di Susskind-Glogower normalizzati e  $d$  è la dimensione di  $\mathcal{H}$ .

Nelle prossime sezioni si mostrerà che questa forma è tipica delle misure covarianti su spazi di dimensione finita.

- Se  $S = \mathbb{Z}$ , la POVM ottimale è anche *ortogonale* (questa osservazione è dovuta originariamente a [28]): infatti, in questo caso, vale la relazione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \langle e(\varphi) | e(\varphi') \rangle &= \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in(\varphi' - \varphi)} \right) \\ &= \delta_{2\pi}(\varphi' - \varphi) , \end{aligned}$$

e si può dunque introdurre un operatore autoaggiunto associato alla misura della fase:

$$F = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \varphi |e(\varphi)\rangle \langle e(\varphi)| .$$

Si noti che, ora, l'operatore "fase" è canonicamente coniugato al generatore degli shift  $H$ .

Una situazione concreta in cui  $S = \mathbb{Z}$  si presenta nel caso in cui si considerino, sul sistema composto di due oscillatori armonici, misure covarianti per la rappresentazione  $\{U(\varphi) \otimes U^*(\varphi)\}$  del gruppo degli spostamenti di fase<sup>10</sup>: in tal caso, infatti, si ha  $H = a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2$ .

Si noti il particolare risultato derivante dell'uso combinato delle due rappresentazioni inequivalenti  $\{U(\varphi)\}$  e  $\{U^*(\varphi)\}$ : nel seguito si potranno osservare altri esempi di stime in cui verrà mostrato come l'uso di rappresentazioni inequivalenti migliori la "qualità" della misura.

---

<sup>10</sup>Con  $U^*(\varphi)$  si intende l'operatore definito dalla relazione  $\langle m | U^*(\varphi) | n \rangle = \langle m | U(\varphi) | n \rangle^*$ .

Una ulteriore generalizzazione, introdotta in [29, 30], si ha considerando, invece che soltanto gli stati puri  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ , una classe più estesa di miscele quantistiche.

In pratica, il fatto che gli stati fossero puri, nella dimostrazione del teorema 3.1.1, era necessario solo per poter scrivere

$$\begin{aligned}\rho_{mn} &= \psi_m^* \psi_n = \\ &= |\psi_m^* \psi_n| e^{i(\theta_n - \theta_m)},\end{aligned}$$

per cui la dimostrazione può essere rifatta allo stesso modo anche per tutti gli stati miscela con elementi di matrice sulla base numero che soddisfino la stessa relazione di fase

$$\rho_{mn} = |\rho_{mn}| e^{i(\theta_m - \theta_n)},$$

che vale per gli stati puri.

Miscela di questo tipo si dicono *stati puri in fase*.

Il funzionale costo assume la forma

$$\mathcal{C}[\xi] = a_0 + \frac{1}{2} \left( \sum_{m,n \in S} a_{|m-n|} \rho_{mn} \xi_{nm} \right),$$

e la POVM ottimale per funzioni costo della classe di Holevo è ancora unitariamente equivalente a quella di Susskind-Glogower generalizzata.

Infine, si può considerare anche il caso in cui, nella serie di Clebsch-Gordan, alcune rappresentazioni irriducibili siano presenti con molteplicità diversa da 1: in questo caso gli autospazi del generatore  $H$  sono degeneri.

La teoria della stima di fase in presenza di degenerazione esposta in [27], consente di ridurre anche il problema degenerare allo schema già studiato.

Nel caso di misure sul set covariante ottenuto a partire da un generico stato puro  $|\psi\rangle$ , tale metodo può essere delineato nel seguente modo: detti  $\{\Pi_n / n \in S\}$  i proiettori sui vari autospazi di  $H$  si consideri il set ortonormale  $\{|n_{\parallel}\rangle / n \in S\}$  ottenuto normalizzando le proiezioni di  $|\psi\rangle$ :

$$|n_{\parallel}\rangle = \frac{\Pi_n |\Psi\rangle}{\|\Pi_n |\Psi\rangle\|}.$$

Ciascun vettore  $|n_{\parallel}\rangle$  genera un sottospazio irriducibile, mentre tutti i vettori  $\{|n_{\parallel}\rangle\}$  assieme generano il sottospazio invariante  $\mathcal{H}_{\parallel}$ , a cui appartiene lo stato  $|\psi\rangle$ .

Chiaramente l'orbita di  $|\psi\rangle$  giace tutta in  $\mathcal{H}_{\parallel}$  (essendo questo invariante) e

in più, se si considera la restrizione ad  $\mathcal{H}_{\parallel}$  dell'operatore  $H$ , la degenerazione è eliminata.

In definitiva, tutto il problema può essere risolto come nel caso non degenerare se ci si restringe al sottospazio invariante  $\mathcal{H}_{\parallel}$ : il costo della misura è dato ancora dalla nota espressione e la POVM ottimale per la classe di Holevo è unitariamente equivalente a quella di Susskind-Glogower:

$$dE(\varphi) = \frac{d\varphi}{2\pi} U |e(\varphi)\rangle \langle e(\varphi)| U^\dagger ,$$

dove ora

$$|e(\varphi)\rangle = \sum_{n \in S} e^{in\varphi} |n_{\parallel}\rangle .$$

Si può inoltre introdurre l'ulteriore generalizzazione che si ottiene considerando, nel caso degenerare, stati puri in fase con supporto in un sottospazio  $\mathcal{H}_{\parallel}$  in cui il generatore  $H$  non presenti degenerazione.

### 3.1.5 Misure di fase su copie multiple

Una prima serie di osservazioni circa il legame fra misure covarianti e dimensionalità dello spazio di Hilbert può essere fatta considerando il problema della stima di fase nel caso siano disponibili per la misura più copie di un dato sistema, tutte nello stesso stato appartenente ad un set covariante.

Il motivo dell'interesse per uno schema di misura di questo tipo deriva dalla seguente osservazione: qualsiasi criterio di merito si scelga, la POVM ottimale per la stima su molte copie non può essere peggiore della POVM ottimale per la stima semplice, visto che la classe delle misure su copie multiple include quella delle misure locali su una singola copia. Ci si aspetta quindi un miglioramento della "qualità" delle misure nel passaggio a molte copie<sup>11</sup>.

Il problema di stima può essere così formalizzato: sia  $\mathcal{H}$  lo spazio di Hilbert associato ad ogni singola copia e quindi, sia  $\mathcal{H}^{\otimes N}$  lo spazio di Hilbert del sistema composto (dove  $N$  è il numero di copie).

Se  $\{U_\varphi\}$  è una rappresentazione in  $\mathcal{H}$  del gruppo degli shift di fase, allora  $\{U_\varphi^{\otimes N}\}$  sarà una rappresentazione in  $\mathcal{H}^{\otimes N}$  del medesimo gruppo.

---

<sup>11</sup>È importante osservare che un miglioramento di questo tipo non ha direttamente nulla a che vedere con il miglioramento della precisione che si ha in fisica classica ripetendo molte volte una misura: mentre in quel caso la ripetizione delle misure portava ad avere una curva sperimentale più vicina alla "vera" distribuzione di probabilità dei risultati, nel caso quantistico lo schema di misura su molte copie permette di migliorare la forma stessa di tale distribuzione, per esempio rendendola più stretta attorno al valore medio.

Si consideri inoltre il set covariante ottenuto prendendo l'orbita dello stato  $|\psi\rangle^{\otimes N}$  sotto l'azione della rappresentazione  $\{U_\varphi^{\otimes N}\}$  del gruppo delle fasi in  $\mathcal{H}^{\otimes N}$ .

Detto  $H_i$  il generatore della rappresentazione  $U_\varphi$  per l' $i$ -esima copia, il generatore della rappresentazione  $\{U_\varphi^{\otimes N}\}$  per il sistema composto sar   $H = \sum_{i=1}^N H_i$ , con autospazi sempre degeneri, tranne che nel caso banale in cui lo spettro di  $H_i$  consista in un solo valore.

Il problema della ricerca della POVM covariante nel caso considerato richiede quindi l'utilizzo del metodo per la stima di fase con degenerazione [27], descritto alla fine del precedente paragrafo.

Nonostante l'espressione della POVM ottimale sia, come gi  visto, molto semplice, non   possibile darne un'espressione semplice nel caso generale: per poter dare delle espressioni esplicite, in quanto segue verranno analizzati due esempi particolari.

- **Esempio 1** Si considerino due copie di un oscillatore armonico, entrambe nello stato di partenza

$$|\psi\rangle = \sin\theta|\mu\rangle + \cos\theta|\nu\rangle \quad \mu \leq \nu$$

dove  $|\mu\rangle$  e  $|\nu\rangle$  sono due vettori della base numero, con una scelta delle fasi tale da avere coefficienti reali positivi nell'espressione di  $|\psi\rangle$ .

Sia quindi  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle^{\otimes 2}$  il corrispondente stato del sistema composto.

Il generatore degli shift    $H = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2$ , con spettro  $S = \mathbb{N}$  e i suoi autospazi sono degeneri.

Se si considera il sottospazio  $\mathcal{H}_\parallel$  generato dal set ortonormale

$$|n_\parallel\rangle = \frac{\Pi_n |\Psi\rangle}{\|\Pi |\Psi\rangle\|}, \quad (3.19)$$

si ha

$$\mathcal{H}_\parallel = \text{span}\{|(2\mu)_\parallel\rangle, |(\mu + \nu)_\parallel\rangle, |(2\nu)_\parallel\rangle\}, \quad (3.20)$$

dove

$$\begin{aligned} |(2\mu)_\parallel\rangle &\doteq |\mu\rangle|\mu\rangle \\ |(\mu + \nu)_\parallel\rangle &\doteq \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mu\rangle|\nu\rangle + |\nu\rangle|\mu\rangle) \\ |(2\nu)_\parallel\rangle &\doteq |\nu\rangle|\nu\rangle, \end{aligned}$$

cioè  $\mathcal{H}_\parallel$  è un sottinsieme del sottospazio totalmente simmetrico di  $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ . La POVM è data quindi, in  $\mathcal{H}_\parallel$ , dal seed

$$\Xi = 3|\tilde{e}(0)\rangle\rangle\langle\langle\tilde{e}(0)| ,$$

dove  $|\tilde{e}(0)\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|(2\mu)_\parallel\rangle\rangle + |(\mu + \nu)_\parallel\rangle\rangle + |(2\nu)_\parallel\rangle\rangle)$ .

Si può mostrare che, a parità di criterio di merito, la misura su due copie qui descritta è migliore di quella ottimale su una copia sola: infatti, se si considera l'espressione del costo, valida nel caso generale

$$\mathcal{C} [\xi] = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k ,$$

con  $b_k = \sum_{|m-n|=k} |\rho_{mn}|$ ,

si ha, nel primo caso,  $\rho_{mn} = \Psi_m^* \Psi_n$  e nel secondo  $\rho_{mn} = \psi_m^* \psi_n$ .

Un calcolo diretto mostra che i coefficienti  $\{b_k\}$  sono maggiori nel primo caso, e cioè che il costo della misura su copie multiple è minore per ogni funzione costo della classe di Holevo.

Si noti la forma particolare dell'operatore  $\Xi$ : esso è composto da un coefficiente pari alla dimensione di  $\mathcal{H}_\parallel$  che moltiplica il proiettore su uno stato entangled simmetrico.

Tale forma è generale per tutte le misure di fase covarianti ottime su un numero arbitrario  $N$  di copie: il fatto che la POVM sia simmetrica dipende infatti esclusivamente dalla definizione (3.19) della base  $\{|n_\parallel\rangle\rangle\}$  di  $\mathcal{H}_\parallel$ , inoltre i vettori così definiti sono sempre entangled (salvo che nel caso banale  $|\Psi\rangle\rangle = |\mu\rangle^{\otimes 2}$ ).

La presenza della dimensione del sottospazio  $\mathcal{H}_\parallel$  corrisponde semplicemente alla generalizzazione al caso degenere della (3.18).

Per inciso, si può infine osservare come la simmetria della POVM sia una caratteristica generale delle misure covarianti ottimali su copie identiche di stati puri: essendo infatti  $|\Psi\rangle\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N}$  un vettore del sottospazio completamente simmetrico, indicato con  $P_S$  il proiettore su tale sottospazio, si ha che

$$\begin{aligned} p(\theta^*, \theta) &= \text{Tr}[\rho_\theta U_{\theta^*} \Xi U_{\theta^*}^\dagger] \\ &= \text{Tr}[P_S U_\theta |\Psi\rangle\rangle\langle\langle\Psi| U_\theta P_S U_{\theta^*} \Xi U_{\theta^*}^\dagger] \\ &= \text{Tr}[\rho_\theta U_{\theta^*} (P_S \Xi P_S) U_\theta] , \end{aligned}$$

ciò solo la parte simmetrica di  $\Xi$  influenza la distribuzione di probabilità e quindi la qualità della misura.

• **Esempio 2**

Un interessante esempio in cui compare in maniera rilevante la dimensione infinita si ha considerando, nel caso di un oscillatore armonico, il problema di stima covariante su  $N$  copie di un certo stato coerente  $|\alpha\rangle$ . In questo esempio  $|\Psi\rangle = |\alpha\rangle^{\otimes n}$ , mentre  $H = \sum_{i=1}^N a_i^\dagger a_i$ :  $H$  ha spettro  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  ed è degenere.

Si esegua dunque, in ciascuno spazio, un cambio di base  $U$  in modo da ottenere  $U|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$ : con questa scelta vale

$$\Pi_n|\Psi\rangle = \sum_{\{i_k\}}' e^{-\frac{N|\alpha|^2}{2}} \frac{|\alpha|^n}{\sqrt{i_1!i_2!\dots i_N!}} |i_1\rangle|i_2\rangle\cdots|i_N\rangle,$$

dove la somma primata sta ad indicare una somma su tutti gli  $\{i_k\}$  (con  $k = 1, \dots, N$ ) che soddisfano il vincolo  $\sum_{k=1}^N i_k = n$ .

La normalizzazione vale

$$\begin{aligned} \|\Pi_n|\Psi\rangle\| &= \left( \sum_{\{i_k\}}' e^{-N|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{i_1!i_2!\dots i_N!} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{N|\alpha|^2}{2}} \frac{(\sqrt{N}|\alpha|)^n}{\sqrt{n!}}, \end{aligned}$$

dove, si è usato il fatto che<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{\{i_k\}}' \frac{1}{i_1!\dots i_N!} &= \frac{1}{n!} \sum_{\{i_k\}}' \binom{n}{i_1 \dots i_N} \\ &= \frac{1}{n!} N^n. \end{aligned}$$

<sup>12</sup>Dati  $N$  numeri interi positivi  $\{i_k\}$ , la cui somma vale  $n$ , si può definire il *coefficiente multinomiale*:

$$\binom{n}{i_1 \dots i_N} \doteq \frac{n!}{i_1!\dots i_N!},$$

così da avere la generalizzazione della formula del binomio di Newton:

$$\left( \sum_{k=1}^N a_k \right)^n = \sum_{\{i_k\}}' \binom{n}{i_1 \dots i_N} a_1^{i_1} \dots a_N^{i_N}$$

(la dimostrazione può essere fatta per induzione).

L'espressione di  $|n_{\parallel}\rangle\rangle$  diventa allora

$$|n_{\parallel}\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{N^n}} \sum'_{\{i_k\}} \sqrt{\binom{n}{i_1 \dots i_N}} |i_1\rangle \dots |i_N\rangle .$$

Si ha quindi ancora che la POVM covariante ottimale, data dal seed

$$\Xi = U^\dagger |e(0)\rangle\rangle \langle\langle e(0)|U ,$$

con

$$|e(0)\rangle\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} |n_{\parallel}\rangle\rangle ,$$

è simmetrica ed entangled.

In questo caso, inoltre, si può fare una osservazione sul comportamento “classico” degli stati coerenti: grazie alla scelta di base operata, si ha

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle\rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} ||\Pi_n|\Psi\rangle\rangle|| |n_{\parallel}\rangle\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{N|\alpha|^2}{2}} \frac{(\sqrt{N}|\alpha|)^n}{\sqrt{n!}} |n_{\parallel}\rangle\rangle \\ &= |\sqrt{N}|\alpha|\rangle\rangle , \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che  $\mathcal{H}_{\parallel}$  è equivalente ad uno spazio di Hilbert di oscillatore armonico.

In definitiva, qualsiasi misura di fase eseguita su  $N$  copie di uno stato coerente  $|\alpha\rangle$ , equivale ad una misura di fase su un unico stato coerente  $|\sqrt{N}|\alpha|\rangle\rangle$ .

Ricordando che il numero medio di fotoni in uno stato coerente  $|\alpha\rangle$  è  $\bar{n} = |\alpha|^2$ , si può generalizzare questa osservazione affermando che, per stati coerenti, la “qualità” della misura ottimale covariante dipende solo dal numero medio totale di fotoni, e non da come questi sono distribuiti.

Tutti i calcoli fatti finora possono infatti essere ripercorsi nel caso di stime di fase sul set covariante ottenuto a partire dal vettore  $|\alpha\rangle|\beta\rangle$  in modo da mostrare che, anche in questo caso, la misura ottimale equivale a quella su un unico stato coerente  $|\gamma\rangle\rangle$  con  $|\gamma|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ .

Per induzione si ottiene dunque che la misura ottimale sul set generato da uno stato  $|\alpha_1\rangle \dots |\alpha_N\rangle$  equivale a quella su uno stato  $|\gamma\rangle\rangle$  con

$$|\gamma|^2 = \sum_{i=1}^N |\alpha|^2.$$

Il numero medio di fotoni disponibili risulta quindi l'unico parametro che governa la qualità di una misura ottimale di fase sugli stati coerenti.

## 3.2 Stime covarianti per i gruppi $SU(d)$

### 3.2.1 Definizione

Si consideri un sistema fisico descritto da uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  di dimensione finita pari a  $d$  sul quale agisce in maniera irriducibile il gruppo  $G = SU(d)$  degli operatori unitari rappresentati da matrici  $d \times d$  unitarie  $U_g$  tali che  $\det(U_g) = 1$ .

Il gruppo  $SU(d)$  è un gruppo di Lie non abeliano, compatto (grazie alla condizione sul determinante), al quale soggiace una varietà reale di dimensione  $d^2 - 1$ . Su di essa è possibile definire una misura invariante che verrà denotata con  $dg$ .

Poiché, dati due stati  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$ , esiste sempre una matrice di  $SU(d)$  che manda  $|\psi\rangle$  in  $|\phi\rangle$  (a meno di una fase overall), si può osservare che l'orbita percorsa da un qualsiasi stato  $|\psi\rangle$  sotto l'azione del gruppo  $SU(d)$  è l'intero insieme degli stati puri del sistema.

Essendo  $\mathcal{H}$  isomorfo a  $\mathbb{C}^d$  si ha che lo spazio degli stati è parametrizzato da una varietà compatta  $(2d - 2)$ -dimensionale<sup>13</sup>: sia  $\Theta$  tale varietà e sia  $d\theta$  la misura invariante indotta su  $\Theta$  dalla misura  $dg$  su  $SU(d)$ .

**Definizione 3.2.1** *Dato un sistema a cui è associato lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , si definisce stima universale su  $\mathcal{H}$  una qualsiasi misura che abbia come insieme dei possibili risultati la varietà  $\Theta$  che parametrizza lo spazio degli stati del sistema.*

### 3.2.2 Stime covarianti universali

Detto  $\theta_0$  l'elemento di  $\Theta$  che parametrizza lo stato di partenza  $|\psi\rangle$ , si considerino, fra tutte le possibili stime universali, quelle *covarianti* per il gruppo  $SU(d)$  (originariamente studiate in [6, 19]): anche in questo caso, la richiesta di covarianza è motivata, oltre che dal significato fisico di questa condizione,

<sup>13</sup>Visto che ciascun vettore di  $\mathcal{H}$  è parametrizzato da moduli e fasi delle sue componenti e che gli stati sono rappresentati da vettori normalizzati a meno di una fase overall (per cui un modulo ed una fase non saranno indipendenti), si ha che i parametri necessari a descrivere lo spazio degli stati sono  $2d - 2$ .

dal teorema (2.2.1), applicabile poiché sia la varietà che il gruppo sono compatti.

Le POVM covarianti hanno la consueta forma infinitesima:

$$dE(\theta) = d\theta U_{g(\theta)} \xi U_{g(\theta)}^\dagger, \quad (3.21)$$

dove  $g(\theta)$  è un elemento di  $G$  tale che  $\theta = g(\theta)\theta_0$  e  $\xi$  è un operatore positivo che permette a  $dE(\theta)$  di soddisfare la relazione di completezza:

$$\int_{\Theta} dE(\theta) = \mathbb{I}.$$

Tale relazione si traduce semplicemente nel vincolo:

$$\text{Tr}[\xi] = d. \quad (3.22)$$

Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} dE(\theta) &= \int_{\Theta} d\theta U_{g(\theta)} \xi U_{g(\theta)}^\dagger \\ &= \int_G dg U_g \xi U_g^\dagger \\ &= \frac{\text{Tr}[\xi]}{d} \mathbb{I}, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che la media sul gruppo  $\langle \xi \rangle = \int_G dg U_g \xi U_g^\dagger$  commuta con tutti gli operatori della rappresentazione irriducibile  $\{U_g\}$  e quindi, per il lemma di Schur, deve valere  $\langle \xi \rangle = c\mathbb{I}$ ; facendo poi la traccia di entrambi i membri si ottiene facilmente  $c = \frac{\text{Tr}[\xi]}{d}$ .

Si osservi infine che, nella (3.21),  $g(\theta)$  è definito modulo  $G_0$  (dove  $G_0$  è il sottogruppo stazionario dato da  $\{g_0 / g_0\theta_0 = \theta_0\}$ ), nel senso che, se  $g$  soddisfa  $g\theta_0 = \theta$ , allora, per ogni  $g_0$  in  $G_0$ , anche  $gg_0$  soddisfa la stessa relazione. Perché la POVM  $dE(\theta)$  sia ben definita, deve essere allora  $U_{g_0} \xi U_{g_0}^\dagger = \xi$  per ogni  $g_0 \in G_0$ , cioè:

$$[\xi, U_{g_0}] = 0 \quad \forall g_0 \in G_0.$$

Si può comunque notare che, dato uno  $\xi$  qualsiasi corrispondente ad una POVM covariante per  $G$ , si può fare in modo di soddisfare quest'ultimo vincolo passando alla media di  $\xi$  sul sottogruppo stazionario:

$$\langle \xi \rangle_{G_0} = \frac{1}{\int_{G_0} dg_0} \int_{G_0} dg_0 U_{g_0} \xi U_{g_0}^\dagger.$$

Se si adotta come criterio di merito quello del maximum likelihood, il problema della ricerca dello  $\xi$  che rende ottimale la misura diventa particolarmente semplice da risolvere: come osservato nel precedente capitolo, il funzionale costo diventa

$$\mathcal{C}[\xi] = -\text{Tr}[|\psi\rangle\langle\psi|\xi] .$$

Se si considera una base ortonormale di  $\mathcal{H}$  ottenuta partendo da  $|\psi\rangle$  e applicando il metodo di Gram-Schmidt, è chiaro che

$$\text{Tr}[|\psi\rangle\langle\psi|\xi] \leq \text{Tr}[\xi] = d .$$

Allora lo  $\xi$  ottimale è quello per cui vale l'uguaglianza

$$\xi = d|\psi\rangle\langle\psi| .$$

Evidentemente lo  $\xi$  trovato commuta con il sottogruppo stazionario. È possibile dimostrare (a questo proposito si veda [6]) che l'espressione ottenuta fornisce una POVM che non è solo ottimale per il criterio della massima verosimiglianza, ma anche per qualsiasi criterio di merito espresso da una funzione costo del tipo

$$c(\theta) = -f(|\langle\psi|\psi_\theta\rangle|^2) ,$$

dove  $f$  è una funzione non decrescente della fidelity  $|\langle\psi|\psi_\theta\rangle|^2$  fra lo stato vero  $|\psi\rangle$  e lo stato stimato  $|\psi_\theta\rangle$ .

### 3.2.3 Stime covarianti su copie multiple di stati puri

Come già visto per la fase, si può considerare uno schema di misura in cui la stima del parametro universale  $\theta$  venga effettuata simultaneamente su più copie dello stato  $|\psi\rangle$ , su ciascuna delle quali agisce lo stesso elemento  $U_g$  del gruppo  $SU(d)$ .

Il problema diventa allora quello di stimare il parametro  $\theta$  del set covariante  $\{|\Psi_\theta\rangle\rangle = |\psi_\theta\rangle^{\otimes N}\}$  ottenuto come orbita di un certo stato di partenza  $|\Psi\rangle\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N}$  sotto l'azione della rappresentazione  $U_g^{\otimes N}$ , dove  $N$  è il numero delle copie<sup>14</sup>.

Si può osservare che la varietà dei parametri  $\theta$  è in corrispondenza biunivoca

<sup>14</sup>Si noti che l'orbita di  $|\Psi\rangle\rangle$  non copre tutto  $\mathcal{H}^{\otimes N}$  ma solo un sottinsieme proprio del sottospazio di  $\mathcal{H}^{\otimes N}$  totalmente simmetrico per scambio della  $i$ -esima copia di  $\mathcal{H}$  con la  $j$ -esima (il problema considerato *non* è un problema di stima universale su  $\mathcal{H}^{\otimes N}$ ).

con l'insieme degli stati dello spazio  $\mathcal{H}$  di singola copia: in questo senso la misura considerata costituisce una stima universale su  $\mathcal{H}$  tramite copie multiple.

Le POVM covarianti avranno la forma:

$$dE(\theta) = d\theta U_{g(\theta)}^{\otimes N} \Xi U_{g(\theta)}^{\dagger \otimes N} ,$$

dove, come prima,  $g(\theta)$  indica un elemento di  $G$ , definito modulo  $G_0$ , tale che  $g(\theta)\theta_0 = \theta$  ( $\theta_0$  è sempre il parametro corrispondente allo stato di partenza  $|\Psi\rangle\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N}$ ).

Perché  $dE(\theta)$  sia univocamente definita dovrà essere:

$$[\Xi, U_{g_0}] = 0 \quad \forall g_0 \in G_0 .$$

I vincoli a cui  $\Xi$  deve sottostare sono, come sempre, la positività e la relazione di completezza della POVM, che in questo caso assume la forma:

$$\int_G d g U_g^{\otimes N} \Xi U_g^{\dagger \otimes N} = \mathbb{I} .$$

Si noti che la rappresentazione  $U_g^{\otimes N}$  non è più irriducibile, per cui il semplice ragionamento sulla media di gruppo, fatto nel precedente paragrafo, non vale più.

È tuttavia possibile una generalizzazione, basata essenzialmente sul lemma di Schur, espressa dal seguente:

**Teorema 3.2.1** *Sia  $U_g$  una rappresentazione proiettiva di un gruppo  $G$  che agisce sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Sia  $\mathcal{H} = \sum_i \mathcal{H}_i$  la decomposizione di  $\mathcal{H}$  in sottospazi irriducibili.*

*Se l'operatore  $A$  commuta con tutti gli operatori  $\{U_g\}$  della rappresentazione, allora vale la seguente decomposizione a blocchi*

$$A = \sum_i a_i P_i + \sum_{i \sim j} a_{ij} T_{ij} , \quad (3.23)$$

*dove  $P_i$  è il proiettore sull' $i$ -esimo sottospazio irriducibile, mentre  $T_{ij}$  è l'isomorfismo che, nel caso le rappresentazioni  $i$  e  $j$  siano equivalenti, connette l' $i$ -esimo sottospazio con il  $j$ -esimo.*

Per la dimostrazione si può vedere, per esempio, [31].

È facile ricavare che i coefficienti presenti nella (3.23) sono dati da

$$\begin{cases} a_i &= \frac{\text{Tr}[P_i A]}{d_i} \\ a_{ij} &= \frac{\text{Tr}[T_{ij}^{-1} A]}{d_i} , \end{cases} \quad (3.24)$$

dove  $d_i = \text{Tr}[P_i]$  è la dimensione del  $i$ -esimo sottospazio invariante  $\mathcal{H}_i$  e con  $T_{ij}^{-1} = T_{ji}$  si è indicato l'isomorfismo inverso di  $T_{ij}$ <sup>15</sup>.

Poiché, in generale, se la misura  $dg$  sul gruppo è invariante, la media di gruppo  $\langle O \rangle_G$  di un operatore  $O$  commuta con tutti gli operatori della rappresentazione considerata, tale media dovrà avere la tipica forma (3.23).

Nel nostro caso la media di gruppo di  $\Xi$  deve essere uguale all'identità  $\mathbb{I}$  su  $\mathcal{H}$  e quindi, dalle (3.24), si ha

$$\begin{cases} a_i &= 1 & \forall i \\ a_{ij} &= 0 & \forall i \sim j, \end{cases}$$

che si traducono nei vincoli su  $\Xi$ :

$$\begin{cases} \text{Tr}[P_i \Xi] &= d_i \\ \text{Tr}[T_{ij} \Xi] &= 0 & \forall i \sim j. \end{cases} \quad (3.25)$$

La POVM ottimale con il criterio del maximum likelihood è quella che minimizza il funzionale costo:

$$\mathcal{C} = -\text{Tr}[(|\Psi\rangle\rangle\langle\langle\Psi|) \Xi].$$

Si osservi che il vettore  $|\Psi\rangle\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N}$  appartiene al sottospazio totalmente simmetrico di  $\mathcal{H}^{\otimes N}$ .

Tale sottospazio, che verrà indicato con  $\mathcal{H}_S$ , costituisce uno dei sottospazi irriducibili di  $SU(d)$  in  $\mathcal{H}^{\otimes N}$  e ha dimensione  $d_s = \binom{d+N-1}{N}$  (a questo proposito, si veda [21]).

Se si costruisce una base di  $\mathcal{H}_S$  in modo che  $|\Psi\rangle\rangle$  sia un elemento della base (eventualmente costruita col metodo di Gram-Schmidt), detto  $P_S$  il proiettore su  $\mathcal{H}_S$ , si può evidenziare che

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= -\text{Tr}[|\Psi\rangle\rangle\langle\langle\Psi|P_S \Xi P_S] \\ &\geq -\text{Tr}[P_S \Xi] \\ &= -d_S, \end{aligned}$$

da cui è chiaro che il costo minimo è ottenuto con la scelta

$$P_S \Xi P_S = d_S(|\psi\rangle\langle\psi|)^N.$$

---

<sup>15</sup>Si ricordi che vale

$$\begin{aligned} T_{ji}T_{ij} &= P_i \\ T_{ij}T_{ji} &= P_j. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda gli elementi di matrice di  $\Xi$  fuori dal sottospazio  $\mathcal{H}_S$ , il loro valore non influenza in nessun modo l'ottimalità della misura: una qualsiasi scelta compatibile con la positività e la completezza di  $\Xi$  è ugualmente valida.

Scelto dunque uno  $\Xi$  ottimale fra quelli possibili, si può poi soddisfare anche la condizione

$$[\Xi, U_{g_0}] = 0 \quad \forall g_0 \in G_0,$$

semplicemente rimpiazzando l'operatore  $\Xi$  con la sua media sul gruppo stazionario  $\langle \Xi \rangle_{G_0}$ .

Si può infatti notare che, passando alla media su  $G_0$ , il likelihood non varia:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[|\Psi\rangle\rangle\langle\langle\Psi| \langle\Xi\rangle_{G_0}] &= \frac{1}{\int_{G_0} d g_0} \int_{G_0} d g_0 \text{Tr}[|\Psi\rangle\rangle\langle\langle\Psi| U_{g_0} \Xi U_{g_0}^\dagger] \\ &= \text{Tr}[|\Psi\rangle\rangle\langle\langle\Psi| \Xi]. \end{aligned}$$

È comunque il caso di osservare che, anche con questa modifica, la POVM ottimale non è definita univocamente (gli elementi fuori diagonale legati a rappresentazioni equivalenti restano arbitrari): ciò è dovuto al fatto che, come già si era potuto notare, il problema di stima considerato ha come naturale dominio di definizione, non l'intero spazio  $\mathcal{H}^{\otimes N}$ , ma il suo sottospazio invariante  $\mathcal{H}_S$ , per cui, una volta trovata la POVM ottimale su  $\mathcal{H}_S$ , esiste una molteplicità di sue possibili estensioni allo spazio di Hilbert complessivo.

Una POVM ottimale per lo schema di misura covariante a  $N$  copie considerato è, ad esempio, quella data da:

$$\Xi = d_S |\Psi\rangle\rangle\langle\langle\Psi| + \mathbb{I}_{(\mathcal{H}_S)^\perp},$$

dove  $(\mathcal{H}_S)^\perp$  è il complemento ortogonale in  $\mathcal{H}^{\otimes N}$  del sottospazio totalmente simmetrico.

Si osservi come la POVM considerata preveda un miglioramento della qualità della misura (il likelihood passa da  $d$  a  $\binom{d+N-1}{N}$ ) pur senza presentare entanglement:  $\Xi$  è dato infatti da una somma di termini fattorizzati.

Viene così evidenziato, in questo caso, il ruolo fondamentale della dimensione dello spazio in cui giace il set covariante che supporta la stima.

### 3.2.4 Stime covarianti su stati generici

È possibile generalizzare i risultati dei paragrafi precedenti anche al caso di stime su set covarianti ottenuti come orbite di generici stati miscela sotto

l'effetto di un gruppo  $SU(d)$ .

Procediamo per gradi:

**Stima su uno stato miscela**

Sia  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$  lo spazio di Hilbert del sistema e sia  $\rho$  uno stato, cioè una matrice  $d \times d$  hermitiana, positiva e a traccia unitaria.

Sia, infine,  $\Theta$  la varietà multidimensionale che parametrizza il set covariante ottenuto applicando a  $\rho$  il gruppo  $SU(d)$ :

$$\rho_\theta = U_{g(\theta)} \rho U_{g(\theta)}^\dagger ,$$

con  $g(\theta)$  definito, a meno di elementi del sottogruppo stazionario, da  $\theta = g(\theta)\theta_0$ .

La ricerca della POVM covariante ottimale per la stima del parametro  $\theta$  procede come già visto in precedenza: il seed  $\xi$  della POVM deve essere un operatore positivo, con traccia pari alla dimensione  $d$  dello spazio di Hilbert, che commuti con tutti gli elementi del sottogruppo stazionario.

Si diagonalizzi  $\rho$ , scrivendolo come

$$\rho = \sum_{i=1}^d p_i |i\rangle\langle i| , \tag{3.26}$$

dove gli autovalori  $\{p_i\}$  sono ordinati in ordine non crescente.

Se si applica l'approccio ML, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= -\text{Tr}[\rho\xi] \\ &= -\left(\sum_{i=1}^d p_i \xi_{ii}\right) \\ &\geq -p_1 \text{Tr}[\xi] \\ &= -p_1 d . \end{aligned}$$

L'uguaglianza si ottiene se

$$\xi = d|1\rangle\langle 1| , \tag{3.27}$$

e questa è l'unica possibile soluzione se  $p_1$  è strettamente il massimo autovalore di  $\rho$ .

Se invece  $p_1 = p_2 = \dots = p_k$ , va ugualmente bene

$$\xi = d \sigma ,$$

dove  $\sigma$  è una matrice densità con supporto in  $\text{span}\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |k\rangle\}$ .

In accordo con quanto detto nella sezione (3.2.2), una buona definizione della

POVM è garantita, senza modificare il valore del costo, se si prende la media di uno  $\xi$  ottimale sul gruppo stazionario: in definitiva la soluzione è

$$d E(\theta) = d \theta U_{g(\theta)} \langle \xi \rangle_{G_0} U_{g(\theta)}^\dagger .$$

Si osservi che, nel caso in cui la soluzione (3.27) è unica, deve necessariamente essere  $\xi = \langle \xi \rangle_{G_0}$ .

Si può poi notare che, come è intuitivo, la stima su uno stato misto è peggiore di quella su uno stato puro (il likelihood è  $p_1 d$ , minore di  $d$  a meno che  $\rho$  non sia puro).

### Stima su copie di miscele quantistiche

Inizialmente verrà considerato uno schema a due copie: sia  $\Xi$  il seed di una POVM covariante per la stima del parametro  $\theta$ , definito, come al solito, sul set covariante generato dallo stato  $\rho^{\otimes 2}$  sotto l'azione della rappresentazione  $\{U_g^{\otimes 2}\}$ .

I vincoli a cui è soggetto  $\Xi$  sono gli stessi già visti nel caso puro.

Si noti che, nel caso considerato,

$$\mathcal{H}^{\otimes 2} = \mathcal{H}_S \oplus \mathcal{H}_A ,$$

dove  $\mathcal{H}_S$  e  $\mathcal{H}_A$  sono, rispettivamente, i sottospazi irriducibili simmetrico e antisimmetrico ([21]).

Le corrispondenti dimensioni sono  $d_S = \frac{d(d+1)}{2}$  e  $d_A = \frac{d(d-1)}{2}$ .

Sia  $\{|i\rangle / i = 1, \dots, d\}$  la base di  $\mathcal{H}$  costituita dagli autovettori di  $\rho$ , ordinati come nel paragrafo precedente, e sia  $\{|ij\rangle\rangle = |i\rangle|j\rangle / i, j = 1, \dots, d\}$  la corrispondente base tensore di  $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ .

Si consideri la base di  $\mathcal{H}_S$  ottenuta simmetrizzando la base tensore, cioè la base data dai vettori  $\{|ii\rangle\rangle / i = 1, \dots, d\}$  assieme con i vettori  $\{|ij\rangle\rangle_S / i < j\}$ , dove

$$|ij\rangle\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ij\rangle + |ji\rangle) \quad \forall i < j .$$

Corrispondentemente, si consideri poi la base di  $\mathcal{H}_A$  costituita dai vettori  $\{|ij\rangle\rangle_A / i < j\}$ , dove

$$|ij\rangle\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}}(|ij\rangle - |ji\rangle) \quad \forall i < j .$$

Gli elementi della base tensore possono essere quindi decomposti sulle due basi considerate:

$$|ij\rangle\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|ij\rangle\rangle_S + |ij\rangle\rangle_A) & \text{se } i < j \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|ji\rangle\rangle_S - |ji\rangle\rangle_A) & \text{se } i > j . \end{cases}$$

Il likelihood della misura è quindi

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[\Xi \rho \otimes \rho] &= \sum_{i,j=1}^d p_i p_j \langle ij | \Xi | ij \rangle \\
&= \sum_{i=1}^d p_i^2 \langle ii | \Xi | ii \rangle \\
&\quad + \sum_{i<j} p_i p_j (\langle ij | \Xi | ij \rangle + \langle ji | \Xi | ji \rangle) \\
&= \sum_{i=1}^d p_i^2 \langle ii | \Xi | ii \rangle \\
&\quad + \sum_{i<j} \frac{p_i p_j}{2} [{}_S \langle ij | \Xi | ij \rangle_S + {}_A \langle ij | \Xi | ij \rangle_A + 2\text{Re}({}_S \langle ij | \Xi | ij \rangle_A) \\
&\quad\quad\quad + {}_S \langle ij | \Xi | ij \rangle_S + {}_A \langle ij | \Xi | ij \rangle - 2\text{Re}({}_S \langle ij | \Xi | ij \rangle_A)] \\
&= \sum_{i \leq j} p_i p_j \Xi_{ij}^{(S)} + \sum_{i < j} p_i p_j \Xi_{ij}^{(A)},
\end{aligned}$$

dove con  $\Xi_{ij}^{(S)}$  e  $\Xi_{ij}^{(A)}$  si sono indicati gli elementi di matrice diagonali di  $\Xi$  sui vari vettori delle basi, rispettivamente, dei sottospazi simmetrico e antisimmetrico.

Tenendo conto delle condizioni  $\text{Tr}[P_S \Xi] = d_S$  e  $\text{Tr}[P_A \Xi] = d_A$ , una possibile scelta che massimizza il likelihood è:

$$\Xi = d_S |11\rangle\langle 11| + d_A |12\rangle\langle 12|_A$$

(si ricordi che, ordinati gli autovalori di  $\rho$  in ordine non decrescente,  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  indicano i due autovettori corrispondenti ai primi due autovalori).

Se  $p_1 > p_2$ , tale scelta è unica a meno del valore dell'elemento non diagonale  $\langle 11 | \Xi | 12 \rangle_A$ , ininfluenza ai fini del likelihood (esso deve sottostare solo al vincolo di positività).

È bene notare che, se  $p_1 = p_2 = \dots = p_k$ , sono ugualmente ottimi anche dei seed della forma:

$$\Xi = d_S \sigma_S + d_A \sigma_A,$$

dove  $\sigma_S$  e  $\sigma_A$  sono due matrici densità con supporto, rispettivamente, sui sottospazi simmetrico e antisimmetrico di  $\text{span}\{|ij\rangle\} / i, j = 1, 2, \dots, k$ .

Passando da  $\Xi$  alla media di  $\Xi$  sul gruppo stazionario  $G_0$ , si ottiene, infine, la soluzione:

$$d E(\theta) = d \theta U_{g(\theta)} \langle \Xi \rangle_{G_0} U_{g(\theta)}^\dagger.$$

Come già osservato, il passaggio alla media su  $G_0$  non modifica il valore del likelihood, cosicché la misura rimane ottimale.

Si osservi che, anche in questo caso, la misura su uno stato puro è migliore di quella su uno misto: il likelihood raggiunto dalla POVM ottimale della precedente formula è

$$\begin{aligned} p_1^2 d_S + p_1 p_2 d_A &= p_1 (p_1 d_S + p_2 d_A) \\ &\leq p_1 d_S, \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza si ha solo se  $p_1 = 1$  e  $p_2 = 0$ , cioè se  $\rho$  è puro.

È ragionevole poi supporre che la derivazione dello  $\Xi$  ottimale fatta per due copie dello stato  $\rho$ , possa essere riproposta anche nel caso di un numero  $N$  arbitrario di copie: poiché i sottospazi invarianti di  $\{U_g^{\otimes N}\}$  differiscono fra loro per simmetrie sotto il gruppo delle permutazioni, si può congetturare che nel calcolo del likelihood avvengano le stesse cancellazioni<sup>16</sup> viste nel caso a due copie, così da ottenere ancora un'espressione del tipo

$$\text{Tr}[\Xi \rho^{\otimes N}] = \sum_i \sum_{k_i=1}^{d_i} p_{k_i}^{(N)} \Xi_{k_i}^{(i)},$$

dove l'indice  $i$  è riferito alle possibili rappresentazioni irriducibili:  $d_i$  è la dimensione di ciascun sottospazio irriducibile  $\mathcal{H}_i$ ,  $\{k_i\}$  indicano i possibili vettori della base di  $\mathcal{H}_i$  ottenuta a partire dalla base tensore  $\{|i_1\rangle|i_2\rangle \cdots |i_N\rangle\}$ ,  $\Xi_{k_i}^{(i)}$  è l'elemento di matrice diagonale di  $\Xi$  sul vettore  $k_i$ -esimo e  $p_{k_i}^{(N)}$  è l'autovalore di  $\rho^{\otimes N}$  che corrisponde all'elemento  $k_i$ -esimo della base  $i$ -esima. Per un likelihood di questo tipo, lo  $\Xi$  ottimale sarebbe della forma

$$\xi = \sum_i \sum_{k_i=1}^{d_i} d_i \sigma_i,$$

dove  $\sigma_i$  è una matrice densità con supporto sul sottinsieme di  $\mathcal{H}_i$  corrispondente all'autovalore massimo  $p_{k_i}^{(N)}$ .

### 3.2.5 Stime con rappresentazioni coniugate

La stima universale su  $\mathcal{H}$  può essere eseguita anche in un modo diverso da quelli considerati finora.

---

<sup>16</sup>È necessaria tuttavia una certa cautela nel trattare le eventuali rappresentazioni equivalenti che possono comparire nella decomposizione di  $\rho$ .

Fissata una certa base  $\{|n\rangle / n = 1, \dots, d\}$  di  $\mathcal{H}$ , si considerino lo stato puro  $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^d \psi_n |n\rangle$  e lo stato  $|\psi^*\rangle$  ottenuto da  $|\psi\rangle$  tramite la relazione:

$$|\psi^*\rangle = \sum_{n=1}^d \psi_n^* |n\rangle . \quad (3.28)$$

Se  $|\psi_\theta\rangle = U_g |\psi\rangle$ , allora vale  $|\psi^*\rangle = U_g^* |\psi^*\rangle$ , dove la coniugazione complessa di un operatore  $O = \sum_{m,n} O_{mn} |m\rangle \langle n|$  è definita, a fissata base, dalla relazione

$$O^* = \sum_{m,n} O_{mn}^* |m\rangle \langle n| .$$

Nel linguaggio tipico della teoria dei gruppi  $SU(d)$ ,  $|\psi^*\rangle$  è lo spinore basso associato allo spinore alto  $|\psi\rangle$ , mentre nel linguaggio della fisica delle particelle si dice che  $|\psi^*\rangle$  è ottenuto da  $|\psi\rangle$  tramite coniugazione di carica.

Si consideri dunque il problema di stima sul set covariante ottenuto a partire dallo stato  $|\Psi\rangle\rangle = |\psi\rangle |\psi^*\rangle$  tramite applicazione della rappresentazione  $\{U_g \otimes U_g^*\}$ : tale set è ancora in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli stati in  $\mathcal{H}$ , per cui la misura del parametro  $\theta$  che corre su di esso è, a tutti gli effetti, una stima universale su  $\mathcal{H}$ .

Si considerino POVM covarianti: esse avranno la consueta forma

$$dE(\theta) = d\theta (U_{g(\theta)} \otimes U_{g(\theta)}^*) \xi (U_{g(\theta)}^\dagger \otimes U_{g(\theta)}^\tau) ,$$

dove  $U_g^\tau = U_g^{*\dagger}$  è il trasposto di  $U_g$  relativamente alla base considerata, mentre  $g(\theta)$  è definito nel modo usuale.

Il vincolo di normalizzazione della POVM può essere esplicitato ricorrendo al teorema (3.23), nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \int_{\Theta} dE(\theta) \\ &= \int_G dg (U_g \otimes U_g^*) \xi (U_g^\dagger \otimes U_g^\tau) \\ &= \frac{\text{Tr}[P_1 \xi]}{d_1} P_1 + \frac{\text{Tr}[P_2 \xi]}{d_2} P_2 , \end{aligned}$$

dove si è usato il risultato, noto dalla teoria dei gruppi  $SU(d)$  (si veda [21], per esempio pag. 154, oppure il paragrafo 8.4 sui diagrammi di Young), che i sottospazi irriducibili della rappresentazione  $\{U_g \otimes U_g^*\}$  sono  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , definiti da

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \text{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{d}}|\mathbb{I}\rangle\rangle\right\} & |\mathbb{I}\rangle\rangle &\doteq \sum_{n=1}^d |n\rangle |n\rangle \\ \mathcal{H}_2 &= (\mathcal{H}_1)^\perp . \end{aligned}$$

Chiaramente, essendo  $d_1 = 1$  e  $d_2 = d^2 - 1$ , le due rappresentazioni sono inequivalenti.

Si ha quindi che la condizione di normalizzazione della POVM implica per  $\xi$  i vincoli  $\text{Tr}[P_1\xi] = d_1$  e  $\text{Tr}[P_2\xi] = d_2$ .

Scritta la decomposizione del vettore  $|\Psi\rangle\rangle = |\psi\rangle|\psi^*\rangle$  sui sottospazi irriducibili come  $|\Psi\rangle\rangle = c_1|\Psi_1\rangle\rangle + c_2|\Psi_2\rangle\rangle$  (ovviamente  $|\Psi_1\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}|\mathbb{I}\rangle\rangle$ , essendo  $\mathcal{H}_1$  unidimensionale), si ha che, nell'approccio ML, il costo della misura è

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= -\langle\langle\Psi|\xi|\Psi\rangle\rangle \\ &= -[|c_1|^2\langle\langle\Psi_1|\xi|\Psi_1\rangle\rangle + |c_2|^2\langle\langle\Psi_2|\xi|\Psi_2\rangle\rangle + 2\text{Re}(c_1^*c_2\langle\langle\Psi_1|\xi|\Psi_2\rangle\rangle)] \\ &\geq -[|c_1|^2\xi_{11} + |c_2|^2\xi_{22} + 2|c_1c_2\xi_{12}|] \\ &\geq -[|c_1|^2\xi_{11} + |c_2|^2\xi_{22} + 2|c_1c_2|\sqrt{\xi_{11}\xi_{22}}] \\ &= -(|c_1|\sqrt{\xi_{11}} + |c_2|\sqrt{\xi_{22}})^2 \\ &\geq -(|c_1|\sqrt{d_1} + |c_2|\sqrt{d_2})^2, \end{aligned}$$

dove l'ultima diseuguaglianza è dovuta al fatto che  $\xi_{22} \leq \text{Tr}[P_2\xi] = d_2$  e  $\xi_{11} = \text{Tr}[P_1\xi] = d_1$ .

Si può osservare che la prima diseuguaglianza vale con l'uguale se e solo se  $c_1^*c_2\xi_{12}$  è un numero reale positivo, cioè, dette  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , rispettivamente, le fasi di  $c_1$  e  $c_2$ , se vale

$$\xi_{12} = |\xi_{12}|e^{i(\theta_1 - \theta_2)},$$

mentre la seconda diseuguaglianza, dovuta al vincolo di positività su  $\xi$ , vale con l'uguaglianza se e solo se  $|\xi_{12}| = \sqrt{\xi_{11}\xi_{22}}$ .

Quindi uno  $\xi$  che raggiunga il limite inferiore per il costo, compatibilmente con i vincoli di positività e completezza, dovrà necessariamente avere la forma:

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i,j=1}^2 \sqrt{d_i d_j} e^{i(\theta_i - \theta_j)} |\Psi_i\rangle\rangle\langle\langle\Psi_j| \\ &= d^2 |\chi\rangle\rangle\langle\langle\chi|, \end{aligned}$$

dove

$$|\chi\rangle\rangle = \frac{1}{d} (\sqrt{d_1} e^{i\theta_1} |\Psi_1\rangle\rangle + \sqrt{d_2} e^{i\theta_2} |\Psi_2\rangle\rangle).$$

Vista la forma di  $\xi$  è chiaro che il vincolo di positività è soddisfatto.

Inoltre, poiché  $\xi$  è l'unico operatore positivo che minimizza il funzionale costo  $\mathcal{C}$ , considerando che passando alla media  $\langle \xi \rangle_{G_0}$  il costo rimane invariato, deve essere  $\langle \xi \rangle_{G_0} = \xi$ , cioè la POVM ottimale è

$$d E(\theta) = d \theta d^2 (U_{g(\theta)} \otimes U_{g(\theta)}^* |\chi\rangle\rangle\langle\langle\chi| (U_{g(\theta)}^\dagger \otimes U_{g(\theta)}^\tau).$$

## Ossevazioni

- Poiché vale

$$\begin{aligned}
 |c_1|^2 &= \frac{1}{d} |\langle\langle \mathbb{I} | \Psi \rangle\rangle|^2 \\
 &= \frac{1}{d} \left| \sum_{n=1}^d \psi_n \psi_n^* \right|^2 \\
 &= \frac{1}{d},
 \end{aligned}$$

e, conseguentemente,  $|c_2|^2 = 1 - |c_1|^2 = \frac{d-1}{d}$ , si ottiene che il valore del costo minimo raggiunto da  $\xi$  è

$$\mathcal{C} = - \left[ \frac{1}{d} + (d^2 - 1) \left( \frac{d-1}{d} \right) + 2 \sqrt{\left( \frac{d-1}{d^2} \right) (d^2 - 1)} \right].$$

Da un confronto diretto si può notare come lo schema considerato sia quindi migliore di quello corrispondente alla stima su due copie identiche, per il quale il costo era  $-d_S = -\frac{d(d+1)}{2}$ .

Si ossevi inoltre che, per  $d$  grandi, il costo su due copie identiche va come  $-\frac{d^2}{2}$ , mentre nel presente caso va come  $-d^2$ .

- Il fatto che gli stati dell'orbita di  $|\psi\rangle|\psi^*\rangle$  sotto  $\{U_g \otimes U_g^*\}$  siano “più distinguibili” di quelli dell'orbita di  $|\psi\rangle|\psi\rangle$  sotto  $\{U_g \otimes U_g\}$  è dovuto, intuitivamente, al fatto che, nel primo caso, per stimare lo stato  $|\psi\rangle$ , si dispone di un'informazione in più che nel secondo: il comportamento di  $|\psi^*\rangle$  sotto l'azione di  $U_g^*$ .

Questa ossevazione suggerisce che la stima del parametro universale  $\theta$  possa essere ulteriormente migliorata prendendo, come stato di partenza, uno stato  $|\psi\rangle|\phi\rangle$  con  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  diversi.

### 3.2.6 Un altro approccio alla stima universale

Dati due stati  $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$ , si consideri il problema di stima del parametro  $\theta$  appartenente alla varietà  $\Theta$  che descrive l'orbita di  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle|\phi\rangle$  sotto l'azione della rappresentazione  $\{V_g\}$  di  $SU(d)$ , dove  $V_g$  può essere sia  $U_g \otimes U_g$  che  $U_g \otimes U_g^*$ .

È opportuno osservare che la varietà  $\Theta$  è più ampia di quella che parametrizza l'insieme degli stati puri in  $\mathcal{H}$ , corrispondentemente al fatto che il sottogruppo stazionario  $G_0$  per  $|\psi\rangle|\phi\rangle$  è più ristretto<sup>17</sup> di quello relativo a  $|\psi\rangle|\psi\rangle$  o a  $|\psi\rangle|\psi^*\rangle$ .

In ogni modo, è sempre possibile mettere in corrispondenza ogni elemento della varietà  $\Theta$  con uno stato puro di  $\mathcal{H}$ , per cui una misura sulla varietà  $\Theta$  può essere comunque vista come uno schema di stima universale su  $\mathcal{H}$ .

Le POVM covarianti per la rappresentazione  $\{V_g\}$  saranno date dalla nota espressione:

$$dE(\theta) = d\theta V_{g(\theta)} \xi V_{g(\theta)}^\dagger,$$

dove il seed  $\xi$  deve soddisfare (oltre alla positività e alla commutazione con tutti gli elementi del sottogruppo stazionario) i vincoli già visti precedentemente

$$\begin{aligned} \text{Tr}[P_1\xi] &= d_1 \\ \text{Tr}[P_2\xi] &= d_2 \end{aligned}$$

(gli indici “1” e “2” sono riferiti, a seconda del caso considerato, o ai sottospazi simmetrico e antisimmetrico, oppure ai due sottospazi invarianti per  $\{U_g \otimes U_g^*\}$  introdotti nel precedente paragrafo)

Scritto  $|\Psi\rangle\rangle$  come  $|\Psi\rangle\rangle = c_1|\Psi\rangle\rangle_1 + c_2|\Psi_2\rangle\rangle$  (dove  $|\Psi_1\rangle\rangle$  e  $|\Psi_2\rangle\rangle$  sono le proiezioni normalizzate di  $|\Psi\rangle\rangle$  sui sottospazi 1 e 2), il costo della POVM nell'approccio ML sarà:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= -\langle\langle\Psi|\xi|\Psi\rangle\rangle \\ &= -[|c_1|^2\langle\langle\Psi_1|\xi|\Psi_2\rangle\rangle + |c_2|^2\langle\langle\Psi_2|\xi|\Psi_2\rangle\rangle + 2\text{Re}(c_1^*c_2\langle\langle\Psi_1|\xi|\Psi_2\rangle\rangle)] . \end{aligned}$$

<sup>17</sup>Infatti, il sottogruppo stazionario  $G_0$  per lo stato  $|\psi\rangle$  è rappresentato in  $\mathcal{H}$  dagli operatori  $U_{g_o}$  con la forma a blocchi

$$U_{g_o} = e^{i\varphi}|\psi\rangle\langle\psi| \oplus U_{g_o}^\perp,$$

dove  $U_{g_o}^\perp$  è un qualsiasi operatore unitario sul complemento ortogonale di  $|\psi\rangle$  in  $\mathcal{H}$  che abbia determinante  $e^{-i\varphi}$ .

Il sottogruppo stazionario per  $|\psi\rangle|\psi\rangle$  e  $|\psi\rangle|\psi^*\rangle$  è sempre  $G_0$ , rappresentato nei due casi, rispettivamente, dagli operatori  $\{U_{g_o}^{\otimes 2}\}$  e  $\{U_{g_o} \otimes U_{g_o}^\dagger\}$  con  $U_{g_o}$  come sopra.

Per  $|\psi\rangle|\phi\rangle$ , invece,  $G_0$  è l'intersezione dei sottogruppi stazionari relativi a  $|\psi\rangle$  e a  $|\phi\rangle$ : scritto  $|\phi\rangle$  come  $|\phi\rangle = c_1|\psi\rangle + c_2|\phi_\perp\rangle$  (dove  $\langle\phi_\perp|\psi\rangle = 0$ ), si ha che, in questo caso,  $G_0$  è rappresentato dagli operatori  $U_{g_o}$  tali che

$$U_{g_o} = e^{i\varphi}(|\psi\rangle\langle\psi| + |\phi_\perp\rangle\langle\phi_\perp|) \oplus U_{g_o}^\perp,$$

dove ora  $U_{g_o}^\perp$  è un operatore unitario sul complemento ortogonale del sottospazio  $\text{span}\{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$  tale che  $\det U_{g_o} = e^{-i\varphi}$ .

Poiché il problema di minimizzazione del costo è precisamente lo stesso affrontato nel precedente paragrafo, si ha che valgono tutte le maggiorazioni fatte: quindi la POVM ottimale è unica ed è data dal seed

$$\xi = d^2 |\chi\rangle\langle\chi| , \quad (3.29)$$

con

$$|\chi\rangle = \frac{1}{d} \left( \sqrt{d_1} e^{i\theta_1} |\Psi_1\rangle + \sqrt{d_2} e^{i\theta_2} |\Psi_2\rangle \right) ,$$

dove  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sono le fasi, rispettivamente, di  $c_1$  e  $c_2$ .

Il costo corrispondente è

$$\mathcal{C} = -(|c_1| \sqrt{d_1} + |c_2| \sqrt{d_2})^2 .$$

Ci si può dunque chiedere quale sia la combinazione  $|\psi\rangle|\phi\rangle$  migliore ai fini di produrre una stima universale che presenti la massima verosimiglianza possibile.

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz al prodotto scalare fra i due vettori  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} |c_1| \\ |c_2| \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} \\ \sqrt{d_2} \end{pmatrix}$  si ha che

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 \\ &\geq -\|\mathbf{v}\|^2 \cdot \|\mathbf{w}\|^2 \\ &= -d^2 , \end{aligned}$$

e che l'uguaglianza si ha se e solo se  $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{v}$ , dove  $\alpha$  è una costante.

Tale condizione si traduce, per i moduli dei coefficienti  $|c_1|$  e  $|c_2|$ , nella relazione

$$\begin{cases} |c_1| = \frac{\sqrt{d_1}}{d} \\ |c_2| = \frac{\sqrt{d_2}}{d} . \end{cases} \quad (3.30)$$

Avviene quindi che, per uno stato  $|\Psi\rangle$  che soddisfa le (3.30), si ha  $|\Psi\rangle = |\chi\rangle$ , e quindi l'espressione (3.29) dello  $\xi$  ottimale diventa:

$$\begin{aligned} \xi &= d^2 |\Psi\rangle\langle\Psi| \\ &= d^2 |\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\phi\rangle\langle\phi| . \end{aligned}$$

È importante notare come il likelihood raggiunto da questa POVM sia il *massimo assoluto* che un misura di parametro universale possa raggiungere in  $\mathcal{H}^{\otimes 2}$ : infatti per ogni POVM covariante il likelihood è  $\text{Tr}[|\Psi\rangle\langle\Psi|\xi] \leq \text{Tr}[\xi] = d^2$  (dove l'ultima uguaglianza è richiesta dalla completezza della misura), ed,

essendo compatti sia il gruppo  $SU(d)$  che la varietà  $\Theta$  considerata, le misure covarianti stabiliscono un limite di ottimalità anche per misure generiche su  $\Theta$  (si veda teorema (2.2.1) ).

È notevole poi il fatto che tale massimo assoluto del likelihood possa essere raggiunto, senza bisogno di entanglement, da una POVM *fattorizzata*: la risorsa fondamentale, che permette il miglioramento dello schema di misura, può essere identificata quindi nella *dimensione* dello spazio di Hilbert in cui il problema di stima è ambientato.

Consideriamo infine i due possibili casi in questione:

- **Primo caso**

Se  $V_g = U_g^{\otimes 2}$ , si ha

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1+s^2)}} ( |\psi\rangle|\phi\rangle + |\psi\rangle|\phi\rangle ) \\ |\Psi_2\rangle\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1-s^2)}} ( |\psi\rangle|\phi\rangle - |\psi\rangle|\phi\rangle ) , \end{aligned}$$

dove con  $s$  si è indicata la sovrapposizione  $s = |\langle\psi|\phi\rangle|$ .

Vale quindi

$$|\Psi\rangle\rangle = \sqrt{\frac{1+s^2}{2}} |\Psi_1\rangle\rangle + \sqrt{\frac{1-s^2}{2}} |\Psi_2\rangle\rangle .$$

Le condizioni (3.30) sono soddisfatte se vale  $|c_1| = \frac{\sqrt{d_1}}{d}$ , cioè se

$$\frac{1+s^2}{2} = \frac{(d+1)}{2d} ,$$

da cui

$$s = \frac{1}{\sqrt{d}} . \tag{3.31}$$

La POVM ottimale per la classe di stati  $\{|\psi\rangle|\phi\rangle\}$  che verifica le (3.31) è

$$\xi = d^2 |\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\phi\rangle\langle\phi| .$$

- **Secondo caso**

Nel caso  $V_g = U_g \otimes U_g^*$ , poiché  $|\Psi_1\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}|\mathbb{I}\rangle\rangle$ , scritto per comodità  $|\Psi\rangle\rangle$  come  $|\Psi\rangle\rangle = |\psi\rangle|\phi^*\rangle$  si ha

$$c_1 = \frac{\langle\phi|\psi\rangle}{\sqrt{d}} ,$$

per cui

$$\begin{aligned} |c_1| &= \frac{s}{\sqrt{d}} \\ |c_2| &= \sqrt{1 - \frac{s^2}{d}} . \end{aligned}$$

Le condizioni (3.30) sui moduli  $|c_1|, |c_2|$  sono soddisfatte se

$$|c_1| = \frac{1}{d} ,$$

e quindi, ancora, se vale la (3.31).

Per la classe di stati  $\{|\psi\rangle|\phi^*\rangle\}$  che soddisfano tale condizione la POVM ottimale è data da

$$\xi = d^2 |\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\phi^*\rangle\langle\phi^*| .$$

Due stati che verificano la relazione (3.31), possono sempre essere pensati, eventualmente a meno di una fase globale, come elementi di due *basi coniugate*, dove si dice che la base  $\mathcal{B}_2 = \{|p_m\rangle / m = 1, \dots, d\}$  è coniugata alla base  $\mathcal{B}_1 = \{|q_n\rangle / n = 1, \dots, d\}$  se vale

$$|p_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^d e^{imn\theta} |q_n\rangle \quad \forall i = 1, \dots, d ,$$

con  $\theta = \frac{2\pi}{d}$ .

Riassumendo i risultati ottenuti in questo paragrafo, si può dire che, per la stima covariante su  $\mathcal{H}^{\otimes 2}$  secondo il criterio ML:

- esiste uno schema di misura “*massimale*”, cioè non ulteriormente migliorabile rimanendo in  $\mathcal{H}^{\otimes 2}$
- tale schema non necessita entanglement, nè nello stato che genera il set covariante, nè nel seed che genera la POVM
- per realizzare un tale schema senza entanglement basta fare la stima su due stati appartenenti a due basi coniugate.

### 3.3 Generalizzazione dei risultati precedenti

La forte analogia che si può osservare, in tutti i casi finora analizzati, nella forma delle POVM ottime suggerisce che sia possibile, sotto opportune ipotesi, risolvere il problema della stima covariante in maniera piuttosto generale. Si considerino allora uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , uno stato puro  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  e un gruppo di Lie compatto  $G$ , che agisce su  $\mathcal{H}$  tramite la rappresentazione proiettiva  $\{U_g\}$ .

Sia  $\mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}_n$ , dove  $\{\mathcal{H}_n\}$  sono i vari sottospazi irriducibili della rappresentazione  $\{U_g\}$ .

Dalla teoria dei gruppi (per esempio in [22]) si ha che, essendo  $G$  compatto, tutte le sue rappresentazioni irriducibili sono finitodimensionali: sia quindi  $d_n < \infty$  la dimensione del sottospazio ennesimo.

Si supponga per ora che non siano presenti rappresentazioni equivalenti e si associ ad ogni rappresentazione uno stato  $|\Psi_n\rangle$ , definito nel modo seguente: detto  $\Pi_n$  il proiettore su  $\mathcal{H}_n$ ,

$$|\Psi_n\rangle \doteq \frac{\Pi_n |\Psi\rangle}{\|\Pi_n |\Psi\rangle\|} \quad \text{se } \Pi_n |\Psi\rangle \neq 0 ,$$

mentre, se  $\Pi_n |\Psi\rangle = 0$ ,  $|\Psi_n\rangle$  è un qualsiasi vettore normalizzato in  $\mathcal{H}_n$ .

Si ha quindi

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |\Psi_n\rangle ,$$

dove

$$c_n = \|\Pi_n |\Psi\rangle\| e^{i\theta_n} .$$

Detta  $\Theta$  la varietà che parametrizza l'orbita di  $|\Psi\rangle$  sotto l'azione del gruppo  $G$ , si consideri una POVM covariante  $E$  su  $\Theta$ , alla quale è associata la densità operatoriale  $M(\theta) = U_g \xi U_g^\dagger$ .

Sia infine  $G_0$  il sottogruppo stazionario, corrispondente agli operatori  $\{V_{g_0}\}$  tali che  $V_{g_0} |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ .

Vale allora la seguente

**Proposizione 3** *Per il problema di stima considerato, la POVM covariante ottimale secondo il criterio della massima verosimiglianza è data dal seed:*

$$\xi = \int_{G_0} d g_0 \quad V_{g_0} |\chi\rangle \langle \chi| V_{g_0}^\dagger , \quad (3.32)$$

dove

$$|\chi\rangle = \sum_n \sqrt{d_n} e^{i\theta_n} |\Psi_n\rangle \quad (3.33)$$

*Osservazione* Si noti come l'espressione considerata racchiuda in sé, come caso particolare, anche le POVM con vettori del tipo di Susskind e Glogower per la misura della fase viste nella prima parte di questo capitolo (nel caso della fase, infatti,  $d_n = 1$  e  $|\Psi_n\rangle = |n\rangle \quad \forall n$ ).

**Dim.** La dimostrazione ricalca essenzialmente quelle già viste finora per i gruppi  $SU(d)$ : grazie al teorema (3.23), il vincolo di completezza della misura si traduce nelle condizioni su  $\xi$  date dalle (3.25), cioè, visto che non ci sono rappresentazioni equivalenti, nella condizione:

$$\text{Tr}[P_n \xi] = d_n \quad \forall n .$$

Per il costo ML valgono quindi le maggiorazioni

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= -\langle \Psi | \xi | \Psi \rangle \\ &= -\left[ \sum_n |c_n|^2 \langle \Psi_n | \xi | \Psi_n \rangle + \sum_{m < n} 2 \text{Re}(c_m^* c_n \langle \Psi_m | \xi | \Psi_n \rangle) \right] \\ &\geq -\left[ \sum_n |c_n|^2 \xi_{nn} + 2 \sum_{m < n} |c_m c_n \xi_{mn}| \right] \\ &\geq -\left[ \sum_n |c_n|^2 \xi_{nn} + 2 \sum_{m < n} |c_m c_n| \sqrt{\xi_{mm} \xi_{nn}} \right] \\ &= -\left[ \sum_n |c_n| \sqrt{\xi_{nn}} \right]^2 \\ &\geq -\left[ \sum_n |c_n| \sqrt{d_n} \right]^2 . \end{aligned}$$

Come visto in precedenza, la prima diseuguaglianza vale se e solo se  $\xi_{mn} = |\xi_{mn}| e^{i(\theta_m - \theta_n)}$ , la seconda se e solo se  $|\xi_{mn}| = \sqrt{\xi_{mm} \xi_{nn}}$  e la terza se e solo se  $\xi_{nn} = d_n$ , per cui deve necessariamente essere

$$\xi = \sum_{m,n} \sqrt{d_m d_n} e^{i(\theta_m - \theta_n)} |\Psi_m\rangle \langle \Psi_n| .$$

Uno  $\xi$  così definito è senz'altro positivo: una volta fatta la media sul gruppo stazionario si ottiene allora una POVM ottimale.

Tale POVM è unica se non sussiste arbitrarietà nella scelta dei vettori  $|\Psi_n\rangle$ , cioè se  $|\Psi\rangle$  ha componenti non nulle su tutti i sottospazi irriducibili. ■

Nel caso in cui siano presenti anche rappresentazioni equivalenti, si può adattare la dimostrazione precedente tramite un ragionamento analogo a quello per la fase nel caso degenerare: bisogna però trovare il modo di gestire i vincoli su  $\Xi$  dati dalle (3.25). Ciò verrà fatto costruendo un'opportuna

decomposizione di  $|\Psi\rangle = \sum_i c_i |\Psi_i\rangle$ , in rappresentazioni irriducibili, tale che  $\langle \Psi_i | T_{ij} | \Psi_j \rangle = 0 \quad \forall i \sim j$ , cioè tale che le eventuali componenti di  $|\Psi\rangle$  su sottospazi relativi a rappresentazioni equivalenti non siano connesse da un isomorfismo.

In questo modo il risultato di (3) rimane valido, soddisfacendo tutte le condizioni (3.25).

Per dimostrare l'esistenza di una tale decomposizione si procederà per gradi.

**Lemma 1** *Siano  $\{\mathcal{H}_i\}$  sottospazi irriducibili relativi a rappresentazioni equivalenti, sia  $\mathcal{H}^\mu$  la loro somma diretta e sia  $T_{ij}$  l'isomorfismo che manda il  $j$ -esimo sottospazio nell' $i$ -esimo.*

*All' $i$ -esimo sottospazio sia associata la base  $\mathcal{B}_i = \{|e_n^{(i)}\rangle\}$ , in modo che valga  $\mathcal{B}_i = T_{ij}\mathcal{B}_j \quad \forall i, j$ , cioè, per ogni  $n$ ,  $|e_n^{(i)}\rangle = T_{ij}|e_n^{(j)}\rangle$ .*

*Si costruiscano le combinazioni lineari  $\mathcal{B}'_i = \sum_j V_{ij}\mathcal{B}_j$  dove  $V_{ij}$  sono gli elementi di matrice di un qualsiasi operatore unitario, mentre la somma di due basi è definita pensando ciascuna base come un vettore e facendo la somma componente per componente.*

*Allora, detto  $\mathcal{H}'_i = \text{span}(\mathcal{B}'_i)$ , si ha che gli  $\mathcal{H}'_i$  costituiscono una nuova decomposizione di  $\mathcal{H}^\mu$  in sottospazi irriducibili ed equivalenti.*

**Dim.** Si osservi innanzitutto che i sottospazi  $\{\mathcal{H}'_i\}$  sono fra loro ortogonali: se  $\mathcal{B}'_i = \{|f_m^{(i)}\rangle\}$  si ha che

$$\begin{aligned} \langle f_m^{(i)} | f_n^{(j)} \rangle &= \sum_{k,l} \langle e_m^{(k)} | V_{ik}^* V_{jl} | e_n^{(l)} \rangle \\ &= \delta_{mn} \sum_k (VV^\dagger)_{ji} \\ &= \delta_{mn} \delta_{ij} . \end{aligned}$$

Inoltre gli  $\{\mathcal{H}'_i\}$  costituiscono una decomposizione di  $\mathcal{H}^\mu$ : poiché vale la relazione inversa  $\mathcal{B}_i = V_{ij}^\dagger \mathcal{B}'_j$ , dal fatto che gli  $\{\mathcal{H}_i\}$  sono una decomposizione di  $\mathcal{H}^\mu$  segue che anche gli  $\{\mathcal{H}'_i\}$  lo sono.

Si può poi notare che ogni  $\mathcal{H}'_i$  supporta una rappresentazione equivalente a quella di  $\mathcal{H}_1$ : si noti infatti che  $\mathcal{B}'_i = \sum_j V_{ij} T_{j1} \mathcal{B}_1$  (dove con  $T_{11}$  si intende il proiettore  $P_1$ ). L'isomorfismo  $S_{i1} = \sum_j V_{ij} T_{j1}$  manda quindi  $\mathcal{H}_1$  in  $\mathcal{H}'_i$  e commuta con tutti gli elementi del gruppo (visto che ogni  $T_{ij}$  commuta).

Essendo ogni  $\mathcal{H}'_i$  equivalente ad  $\mathcal{H}_1$ , si ha che tutti gli  $\{\mathcal{H}'_i\}$  sono equivalenti fra di loro.

Inoltre, ogni  $\mathcal{H}'_i$  è un sottospazio invariante: se  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}'_i$ , allora, per ogni  $g \in G$ :

$$\begin{aligned}
U_g|\Psi\rangle &= U_g\left(\sum_n c_n|f_n^{(i)}\rangle\right) \\
&= U_g\left(\sum_n c_n S_{i1}|e_n^{(1)}\rangle\right) \\
&= U_g S_{i1}\left(\sum_n c_n|e_n^{(1)}\rangle\right) \\
&= S_{i1}U_g\left(\sum_n c_n|e_n^{(1)}\rangle\right) \\
&= S_{i1}\left(\sum_n d_n|e_n^{(1)}\rangle\right) \\
&= \sum_n d_n|f_n^{(i)}\rangle \\
&\in \mathcal{H}'_i
\end{aligned}$$

Infine, per quanto riguarda l'irriducibilità, supponiamo che  $W'$  sia un sottospazio invariante di  $\mathcal{H}'_i$  e che  $W$  sia il corrispondente sottospazio di  $\mathcal{H}_1$  tale che  $W' = S_{i1}W$ .

Poiché  $S_{i1}$  commuta con tutti gli elementi del gruppo, è evidente che  $W'$  è invariante se e solo se anche  $W$  lo è. Ma  $\mathcal{H}_1$  è irriducibile per ipotesi e quindi anche  $\mathcal{H}'_i$  è irriducibile.

Riassumendo, gli  $\{\mathcal{H}'_i\}$  costituiscono una decomposizione ortogonale di  $\mathcal{H}^\mu$  in sottospazi invarianti irriducibili. ■

Grazie al precedente lemma si può facilmente dimostrare il risultato che si desidera:

**Teorema 3.3.1** *Dato un qualsiasi vettore  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ , si può sempre ottenere una decomposizione  $|\Psi\rangle = \sum_i c_i|\Psi_i\rangle$  in rappresentazioni irriducibili  $\{\mathcal{H}_i\}$  tale che  $\langle\Psi_i|T_{ij}|\Psi_j\rangle = 0 \quad \forall i \sim j$ .*

**Dim.** Si scriva una prima decomposizione  $\{\mathcal{H}_i\}$  di  $\mathcal{H}$  in sottospazi irriducibili: sia  $|\Psi\rangle = \sum_i c_i|\Psi_i\rangle$ .

Si riuniscano assieme tutte le rappresentazioni equivalenti:  $|\Psi\rangle = \sum_\mu |\Psi_\mu\rangle$ , dove i vettori (non normalizzati)  $|\Psi_\mu\rangle$  sono definiti da  $|\Psi_\mu\rangle = \sum'_i c_i|\Psi_i\rangle$ , intendendo come somma primata quella su tutti gli  $i$  tali che  $i \sim j$ .

Il problema diventa quindi quello di decomporre opportunamente ciascun vettore  $|\Psi_\mu\rangle$  nel corrispondente spazio  $\mathcal{H}^\mu$ , dove  $\mathcal{H}^\mu = \bigoplus'_i \mathcal{H}_i$  (la somma è sempre fatta su tutti gli  $i$  tali che  $i \sim \mu$ ).

Per ogni sottospazio  $\mathcal{H}_i$  sia  $\mathcal{B}_i = \{|e_n^{(i)}\rangle\}$  una base ortonormale: le varie basi siano scelte in modo che valga:  $\mathcal{B}_i = T_{ij}\mathcal{B}_j \quad \forall i, j$ .

Con questa decomposizione,  $|\Psi^\mu\rangle = \sum'_{i,n} \Psi_{in} |e_n^{(i)}\rangle$ .

Supponiamo di operare in ciascuno spazio  $\mathcal{H}_i$  lo stesso cambio di base, descritto dalla matrice unitaria  $W$ : i vettori delle nuove basi  $\{\mathcal{B}'_i\}$  siano dati da

$$|f_m^{(i)}\rangle = \sum_n W_{mn} |e_n^{(i)}\rangle \quad \forall i, \forall m .$$

Si noti che valgono ancora le relazioni  $\mathcal{B}'_i = T_{ij}\mathcal{B}'_j$ .

Supponiamo poi di effettuare un cambio di decomposizione di  $\mathcal{H}^\mu$ , ai sensi del precedente lemma, tramite gli elementi di matrice  $V_{ij}$  di un operatore unitario:  $\mathcal{B}''_i = \sum'_j V_{ij}\mathcal{B}'_j$ .

Quindi, scritto  $\mathcal{B}''_i = \{|g_m^{(i)}\rangle\}$ , si ha

$$\begin{aligned} |g_m^{(i)}\rangle &= \sum'_j V_{ij} |f_m^{(j)}\rangle \\ &= \sum'_{j,n} V_{ij} W_{mn} |e_n^{(j)}\rangle . \end{aligned}$$

Imponiamo che, grazie a questi due cambi di base, sia

$$|\Psi^\mu\rangle = \sum'_{i,m} \Sigma_{im} |g_m^{(i)}\rangle ,$$

dove l'elemento di matrice  $\Sigma_{im}$  è diverso da zero solo se  $i = m$ .

In questo modo, si ha una decomposizione  $|\Psi^\mu\rangle = \sum'_i c_i |\Psi_i\rangle$  che soddisfa le relazioni cercate:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_i | T_{ij} | \Psi_j \rangle &= \langle g_i^{(i)} | T_{ij} | g_j^{(j)} \rangle \\ &= \langle g_i^{(i)} | g_j^{(i)} \rangle \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Perché la precedente condizione si realizzi deve valere:

$$\Psi_{jn} = \sum'_{i,m} \Sigma_{im} V_{ij} W_{mn} ,$$

cioè, in notazione matriciale,  $\Psi = V^T \Sigma W$ .

Questa non è altro che la decomposizione in valori singolari della matrice

$\Psi$ , quindi, ragionando a ritroso, per avere il corretto cambio di base ed il corretto cambio di decomposizione è sufficiente scrivere  $\Psi$  nella sua forma a valori singolari..

Effettuando la stessa costruzione per ogni  $\mu$  si ottiene una decomposizione di  $\mathcal{H}$  con le proprietà richieste.

■

Si ricordi che, per quanto riguarda l'unicità della POVM ottimale sussistono i problemi a cui si era già accennato: qualora una rappresentazione irriducibile mancasse nella decomposizione di  $|\Psi\rangle$ , la scelta dei corrispondenti elementi di matrice in  $\Xi$  è ininfluente ai fini del likelihood ed è perciò, nel rispetto dei vincoli di positività e completezza, largamente arbitraria.

Analogamente con quanto avveniva per la fase, si può poi generalizzare il ragionamento fatto anche ad una certa classe di stati misti.

Si scelga infatti, per ogni rappresentazione irriducibile, un vettore  $|e_i\rangle \in \mathcal{H}^{(i)}$ , facendo attenzione, nel caso di rappresentazioni equivalenti, a scegliere per ciascuna delle diverse rappresentazioni, vettori non connessi da isomorfismi<sup>18</sup>: chiaramente, per ogni stato miscela con supporto in  $span(\{|e_n\rangle\})$  che sia puro in fase, tutte le maggiorazioni della dimostrazione di prop. (3) possono essere ugualmente fatte e quindi, anche in questo caso, una POVM covariante ottimale deve avere la consueta forma.

## 3.4 Misure covarianti per la rappresentazione di Weyl-Heisenberg

### 3.4.1 Generalità

Come esempio di problema di stima covariante con un gruppo non compatto verrà qui considerato il caso corrispondente al gruppo delle traslazioni su  $\mathbb{R}^2$ . Questo è un gruppo  $G$  di Lie abeliano, diffeomorfo al piano complesso  $\mathbb{C}$ : ogni elemento di  $G$  può anche essere pensato come un punto  $z \in \mathbb{C}$  cosicché la composizione di due elementi  $z_1$  e  $z_2$  del gruppo è data dalla loro somma  $z_1 + z_2$ .

Scritto  $z = |z|e^{i\varphi}$ , una misura invariante su  $G$  è data da  $\frac{d^2 z}{\pi} \doteq \frac{|z|d|z|d\varphi}{\pi}$ :

---

<sup>18</sup>Più precisamente, non si può prendere un numero di rappresentazioni equivalenti alla rappresentazione  $\mu$  superiore alla dimensione di  $\mathcal{H}_\mu$  (altrimenti alcuni dei relativi vettori sarebbero necessariamente connessi da isomorfismo).

ovviamente la misura sull'intero gruppo diverge ( $G$  non è *finito*).

Dato uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  di oscillatore armonico, a  $G$  è associata la rappresentazione proiettiva  $\{D(z) / z \in \mathbb{C}\}$ , detta *di Weyl-Heisenberg*, dove con  $D(z)$  si indica l'operatore unitario

$$D(z) = e^{(za^\dagger - \bar{z}a)} ,$$

detto *operatore di spostamento (displacement operator)* (per un maggiore dettaglio sulle proprietà della rappresentazione di Weyl-Heisenberg si rimanda a [32]).

La proiettività della rappresentazione in questione può essere mostrata facendo uso della formula di Baker-Campbell-Hausdorff (per la dimostrazione si veda [33]):

$$e^A e^B = e^{\frac{1}{2}[A,B]} e^{A+B} , \quad (3.34)$$

valida per ogni coppia di operatori  $A, B$  tali che

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0 .$$

Infatti, essendo  $[z_1 a^\dagger - \bar{z}_1 a, z_2 a^\dagger - \bar{z}_2 a] = 2i \text{Im}(z_1 \bar{z}_2)$ , si ha:

$$D(z_1)D(z_2) = e^{i \text{Im}(z_1 \bar{z}_2)} D(z_1 + z_2) \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C} .$$

Il significato fisico della rappresentazione di Weyl-Heisenberg può essere chiarito meglio grazie alle relazioni:

$$\begin{cases} D^\dagger(z) a D(z) &= a + z \\ D^\dagger(z) a^\dagger D(z) &= a^\dagger + \bar{z} . \end{cases} \quad (3.35)$$

Essendo infatti

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \\ P &= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \frac{(a - a^\dagger)}{i} , \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \langle \psi | D^\dagger(z) X D(z) | \psi \rangle &= \langle \psi | X | \psi \rangle + \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \text{Re}(z) \\ \langle \psi | D^\dagger(z) P D(z) | \psi \rangle &= \langle \psi | P | \psi \rangle + \sqrt{2\hbar m\omega} \text{Im}(z) , \end{cases}$$

ovvero l'applicazione di un operatore  $D(z)$  ad un certo stato  $|\psi\rangle$  causa, nei valori medi di posizione e momento, rispettivamente uno shift di  $\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \text{Re}(z)$

e uno di  $\sqrt{2\hbar m\omega} \operatorname{Im}(z)$ .

Si può inoltre osservare che le rappresentazioni  $\{e^{ixP} / x \in \mathbb{R}\}$  e  $\{e^{-ipX} / p \in \mathbb{R}\}$  del gruppo delle traslazioni rispettivamente nello spazio delle posizioni e in quello dei momenti, sono incluse in quella di Weyl-Heisenberg, nel senso che corrispondono semplicemente a operatori spostamento  $\{D(z)\}$ , con  $z$  reale nel primo caso e con  $z$  immaginario puro nel secondo: quindi la rappresentazione di Weyl-Heisenberg è senz'altro irriducibile su  $\mathcal{H}$ .

### 3.4.2 Misure covarianti su $\mathcal{H}$

Dato uno stato  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , si consideri la sua orbita  $\{|\psi^{(z)}\rangle = D(z)|\psi\rangle / \forall z \in \mathbb{C}\}$ .

Poiché gli operatori di spostamento non hanno autovettori normalizzabili, il sottogruppo stazionario  $G_0$  è banale, e quindi il set covariante considerato è in corrispondenza biunivoca con il piano complesso.

Seguendo [19], si consideri dunque una POVM covariante per la misura della variabile  $z$  data da

$$dE(z) = \frac{d^2z}{\pi} D(z)\xi D^\dagger(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} .$$

Fissata una certa funzione costo invariante  $c(|z^* - z|)$ , sebbene non valga necessariamente il teorema (2.2.1) (visto che il gruppo  $G$  non è compatto), la sola invarianza della misura  $\frac{d^2z}{\pi}$  è sufficiente a garantire l'equivalenza dell'approccio bayesiano con quello minimax.

Si ha infatti che

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(z) &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z^*}{\pi} c(|z^* - z|) p(z^*|z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z^*}{\pi} c(|z^* - z|) p(z^* - z|0) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2z'}{\pi} c(|z'|) p(z'|0) \\ &= \mathcal{C} , \end{aligned}$$

cioè che il costo di una misura covariante non dipende dallo stato  $|\psi_z\rangle$  su cui essa viene fatta.

È quindi indifferente prendere il massimo  $\max\{\mathcal{C}(z) / z \in \mathbb{C}\}$  o la media  $\langle \mathcal{C} \rangle$  secondo una qualsiasi distribuzione di probabilità a priori del parametro  $z$ .

Anche in questo caso, come criterio di merito, verrà usato il criterio della

massima verosimiglianza, assumendo cioè la funzione costo  $\delta^{(2)}(z)$ <sup>19</sup> e quindi il funzionale costo

$$\mathcal{C}[\Xi] = -\text{Tr}[|\psi\rangle\langle\psi|\xi] .$$

I vincoli su  $\xi$  saranno la positività e la relazione di completezza

$$\mathbb{I} = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} D^\dagger(z)\xi D(z) ,$$

che, grazie alla relazione  $\langle\xi\rangle = \text{Tr}[\xi]\mathbb{I}$ , dovuta all'irriducibilità<sup>20</sup>, si riduce alla condizione  $\text{Tr}[\xi] = 1$ .

Poiché vale

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[\Xi] &= -\langle\psi|\xi|\psi\rangle \\ &\geq -\text{Tr}[\xi] \\ &= -1 , \end{aligned}$$

è chiaro che l'unica POVM ottimale si ottiene con il seed

$$\xi = |\psi\rangle\langle\psi| .$$

Si osservi che la POVM considerata può, in un certo senso, essere vista come una misura congiunta di posizione e momento definita su un set covariante di stati: noti i valori medi di  $X$  e  $P$  su  $|\psi\rangle$ , misurare  $z$  significa misurare gli shift che questi subiscono.

Per  $|\psi\rangle = |0\rangle$  si ottiene proprio la POVM ottimale di Arthurs-Kelly [34] per la misura congiunta di posizione e momento.

---

<sup>19</sup>Si ricordi che la *delta di Dirac nel piano complesso* è definita come

$$\delta^{(2)}(x + iy) = \delta(x) \otimes \delta(y) .$$

<sup>20</sup>Poiché la media sul gruppo  $\langle\xi\rangle$  commuta con tutta una rappresentazione irriducibile deve essere proporzionale all'identità. Considerando l'elemento di matrice diagonale sul vuoto si ha

$$\begin{aligned} \langle 0| \left( \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} D^\dagger(z)\xi D(z) \right) |0\rangle &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} \langle z| \xi |z\rangle \\ &= \text{Tr}[\xi] , \end{aligned}$$

da cui  $\langle\xi\rangle = \text{Tr}[\xi]\mathbb{I}$ .

### 3.4.3 Misure su copie multiple

Si consideri il problema di stima sul set covariante ottenuto applicando la rappresentazione  $\{D(z)^{\otimes N}\}$  al vettore  $|\Psi\rangle\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N}$ : poiché vale

$$D(z)^{\otimes N} = V^\dagger D(\sqrt{N}z) \otimes \mathbb{I}^{\otimes(N-1)} V ,$$

dove  $V$  è l'operatore unitario, detto *di multisplitter*, dato da

$$V = e^{i\frac{\pi}{4}[a_1(a_2^\dagger + \dots + a_N^\dagger) + a_1^\dagger(a_2 + \dots + a_N)]} ,$$

si ha che tale set è ancora in corrispondenza biunivoca con il piano complesso (l'unico elemento del gruppo che lascia il vettore  $|\Psi\rangle\rangle$  invariato è l'identità). Per il seed di una POVM covariante dovrà valere la relazione

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} D(z)^{\otimes N} \Xi D(z)^\dagger{}^{\otimes N} \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} V^\dagger ( D(\sqrt{N}z) \otimes \mathbb{I}^{\otimes(N-1)} ) ( V \Xi V^\dagger ) ( D^\dagger(\sqrt{N}z) \otimes \mathbb{I}^{\otimes(N-1)} ) V , \end{aligned}$$

cioè, con il cambio di variabile  $z' = \sqrt{N}z$ ,

$$\mathbb{I} = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z'}{\pi} \frac{1}{N} (D(z') \otimes \mathbb{I}^{\otimes(N-1)}) (V \Xi V^\dagger) (D(z')^\dagger \otimes \mathbb{I}^{\otimes(N-1)}) ,$$

da cui, sfruttando l'irriducibilità di  $\{D(z')\}$  sul primo spazio, si ha

$$\text{Tr}_1[V \Xi V^\dagger] = N \mathbb{I}^{\otimes(N-1)} .$$

Il problema, in generale piuttosto complesso, di minimizzazione del funzionale costo  $\mathcal{C}[\Xi] = -\text{Tr}[|\Psi\rangle\rangle\langle\langle\Psi|\Xi]$  con i vincoli

$$\begin{cases} \text{Tr}[V \Xi V^\dagger] = N \mathbb{I}^{\otimes(N-1)} \\ \Xi \text{ positivo} , \end{cases}$$

verrà qui considerato nel caso più semplice: quando  $|\psi\rangle = |0\rangle$ .

È facile verificare che  $V^\dagger|0\rangle^{\otimes N} = |0\rangle^{\otimes N}$ , per cui il costo può essere riscritto come:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[\Xi] &= \text{Tr}[(|0\rangle\langle 0|)^{\otimes N} \Xi] \\ &= \text{Tr}[(|0\rangle\langle 0|)^{\otimes N} (V \Xi V^\dagger)] . \end{aligned}$$

Se si considera la base  $\mathcal{B}$  del prodotto tensore  $\mathcal{H}^{\otimes N}$  definita da

$$\mathcal{B} = \{|i_1\rangle \cdots |i_N\rangle / i_1, \dots, i_N = 0, 1, 2, \dots\} ,$$

si può scrivere

$$V \Xi V^\dagger \doteq \mathcal{X} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_N \\ j_1, \dots, j_N}} x_{i_1, \dots, i_N}^{j_1, \dots, j_N} |i_1, \dots, i_N\rangle \langle j_1, \dots, j_N| ,$$

evidenziando così che

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[\Xi] &= -x_{0 \dots 0}^{0 \dots 0} \\ &\geq -(N-1)^\otimes \langle 0 | \text{Tr}_1[\mathcal{X}] | 0 \rangle^{\otimes(N-1)} \\ &= -N . \end{aligned}$$

Perché valga l'uguaglianza è quindi necessario che sia

$$x_i^{i \ 0 \dots 0} = N \delta_{i0} \quad \forall i ,$$

e quindi, detti  $W_1$  il sottospazio  $\{|\psi\rangle|0\rangle^{\otimes(N-1)} / \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}\}$  e  $P_1$  il corrispondente proiettore, a causa della positività di  $\mathcal{X}$ , deve essere

$$P_1 \mathcal{X} P_1 = N(|0\rangle\langle 0|)^{\otimes N} .$$

In definitiva,  $\mathcal{X}$  può essere rappresentato nella forma a blocchi

$$\mathcal{X} = \left( \begin{array}{ccc|c} N & 0 & \dots & \mathbf{v}^\dagger \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{v} & 0 & \dots & \zeta \end{array} \right)$$

dove il primo blocco diagonale è riferito al sottospazio  $W_1$ , il secondo al suo complemento ortogonale  $W_2$  in  $\mathcal{H}^{\otimes N}$ , e il vettore  $\mathbf{v}$  appartiene a  $W_2$ .

Esiste quindi una larga arbitrarietà sull'operatore  $\mathcal{X}$  ottimale: una volta soddisfatto il vincolo di positività di  $\mathcal{X}$ , rimane solo la condizione su  $\zeta$

$$\text{Tr}_1[\zeta] = N(\mathbb{I}^{\otimes(N-1)} - (|0\rangle\langle 0|)^{\otimes(N-1)}) .$$

Una possibile espressione è, per esempio

$$\mathcal{X} = N[(|0\rangle\langle 0|)^{\otimes N} + \mathbb{I}_{W_2}] .$$

In questo caso si ha semplicemente  $\Xi = \mathcal{X}$ , corrispondente ad una POVM ottimale che non prevede entanglement.

### 3.4.4 Misure con rappresentazioni coniugate

Si consideri, analogamente a quanto fatto per  $SU(d)$ , uno schema di misura che preveda la stima sul set covariante ottenuto applicando al vettore  $|\Psi\rangle\rangle = |\psi\rangle|\psi^*\rangle$  la rappresentazione  $\{\{D(z)\otimes D^*(z)\}\}$ : ancora una volta, il set considerato è in corrispondenza biunivoca con il piano complesso e la stima considerata può essere vista come una misura del valore medio di posizione e momento degli stati del set.

Il vincolo di completezza sul seed  $\Xi$  di una POVM covariante diventa in questo caso

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} D(z) \otimes D^*(z) \Xi (D(z) \otimes D^*(z))^\dagger \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2 z}{\pi} e^{(-\bar{z}Z+zZ^\dagger)} \Xi e^{(+\bar{z}Z-zZ^\dagger)}, \end{aligned}$$

dove con  $Z$  si è indicato l'operatore  $a_1 - a_2^\dagger$ .

Per esplicitare il vincolo considerato è necessario un breve sommario di alcune proprietà dell'operatore  $Z$ , studiato in dettaglio in [36, 35]:

- $Z$  è *normale*, cioè  $[Z, Z^\dagger] = 0$ .  
Si può mostrare che ad ogni operatore normale è associata una risoluzione proiettiva dell'identità, vale cioè il teorema di risoluzione spettrale, esattamente come per gli operatori autoaggiunti (salvo che lo spettro non è necessariamente contenuto sull'asse reale).  
È bene ricordare che osservazioni di questo genere non hanno soltanto un interesse teorico: in [37], per esempio, l'esistenza di una risoluzione spettrale ha permesso di realizzare uno schema pratico di misura dell'operatore  $Z$  tramite heterodyna non convenzionale.
- $Z$  possiede un set continuo di autovettori ortonormali “alla Dirac”  $\{|z\rangle\rangle / z \in \mathbb{C}\}$ , definiti dalle relazioni

$$\begin{aligned} |0\rangle\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} |nn\rangle\rangle = \frac{|\mathbb{I}\rangle\rangle}{\sqrt{\pi}} \\ |z\rangle\rangle &= (D(z) \otimes \mathbb{I})|0\rangle\rangle. \end{aligned}$$

Infatti, si verifica facilmente che

$$\begin{aligned} Z|0\rangle\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |n-1\rangle|n\rangle - \sum_{n=0}^{+\infty} |n\rangle|n+1\rangle \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
Z|z\rangle &= (a_1 - a_2^\dagger)(D(z) \otimes \mathbb{I})|0\rangle \\
&= (D(z) \otimes \mathbb{I})(a_1 + z - a_2^\dagger)|0\rangle \\
&= (D(z) \otimes \mathbb{I})z|0\rangle \\
&= z|z\rangle .
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\langle\langle z|z'\rangle\rangle &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \langle n|D(z' - z)|n\rangle e^{-i\text{Im}(\bar{z}z')} \\
&= \frac{1}{\pi} e^{-i\text{Im}(\bar{z}z')} \text{Tr}[D(z' - z)] \\
&= \delta^{(2)}(z' - z) ,
\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che  $\text{Tr}[D(z)] = \pi\delta^{(2)}(z)$ .

- Gli autovettori considerati costituiscono una risoluzione dell'identità: infatti

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} d^2 z |z\rangle\langle\langle z| &= \int_{\mathbb{C}} d^2 z (D(z) \otimes \mathbb{I})|0\rangle\langle\langle 0|(D^\dagger(z) \otimes \mathbb{I}) \\
&= \mathbb{I}_1 \otimes \text{Tr}_1[|\mathbb{I}\rangle\langle\langle \mathbb{I}|] \\
&= \mathbb{I} .
\end{aligned}$$

Tale risoluzione dà la spettralizzazione di  $Z$ :

$$Z = \int_{\mathbb{C}} d^2 z |z\rangle\langle\langle z| .$$

Grazie a queste osservazioni, il vincolo su  $\Xi$  può essere riscritto come

$$\begin{aligned}
\mathbb{I} &= \iiint \frac{d^2 z}{\pi} d^2 z_1 d^2 z_2 e^{(\bar{z}z_1 - z\bar{z}_1)} \langle\langle z_1|\Xi|z_2\rangle\rangle e^{(z\bar{z}_2 - \bar{z}z_2)} |z_1\rangle\langle\langle z_2| \\
&= \iiint \frac{d^2 z}{\pi} d^2 z_1 d^2 z_2 e^{z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) - \bar{z}(z_2 - z_1)} \Xi_{z_1 z_2} |z_1\rangle\langle\langle z_2| \\
&= \iint d^2 z_1 d^2 z_2 \pi\delta^{(2)}(z_2 - z_1) \Xi_{z_1 z_2} |z_1\rangle\langle\langle z_2| \\
&= \int d^2 z \pi \Xi_{zz} |z\rangle\langle\langle z| ,
\end{aligned}$$

dove, nella penultima uguaglianza, si è usata la relazione, facile da verificare:

$$\delta^{(2)}(z) = \int_{\mathbb{C}} d^2 w \frac{1}{\pi^2} e^{w\bar{z} - \bar{w}z} .$$

Quindi, in definitiva, deve valere

$$\Xi_{zz} = \frac{1}{\pi} \quad \forall z \in \mathbb{C} .$$

Per il costo ML valgono le maggiorazioni

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= -\text{Tr}[\Psi] \langle\langle \Psi | \Xi \rangle\rangle \\ &= -\iint d^2 z_1 d^2 z_2 \Psi_{z_1}^* \Xi_{z_1 z_2} \Psi_{z_2} \\ &\geq -\iint d^2 z_1 d^2 z_2 |\Psi_{z_1} \Psi_{z_2} \Xi_{z_1 z_2}| \\ &\geq -\iint d^2 z_1 d^2 z_2 |\Psi_{z_1} \Psi_{z_2}| \sqrt{\Xi_{z_1 z_1} \Xi_{z_2 z_2}} \\ &= -\frac{1}{\pi} \left( \int d^2 z |\Psi_z| \right)^2 . \end{aligned}$$

Poiché nella prima diseuguaglianza l'uguale vale se e solo se

$$\Xi_{z_1 z_2} = |\Xi_{z_1 z_2}| e^{i(\theta_{z_1} - \theta_{z_2})} ,$$

(dove con  $\theta_z$  si intende la fase di  $\Psi_z$ ) e nella seconda se e solo se  $|\Xi_{z_1 z_2}| = \sqrt{\Xi_{z_1 z_1} \Xi_{z_2 z_2}}$ , allora l'unico  $\Xi$  che minimizza il funzionale costo è

$$\Xi = \iint d^2 z_1 d^2 z_2 \frac{1}{\pi} e^{i(\theta_{z_1} - \theta_{z_2})} |z_1\rangle\rangle \langle\langle z_2| .$$

Analogamente con quanto fatto per i gruppi compatti, si può definire, formalmente, il vettore non normalizzabile

$$|\chi\rangle\rangle = \int_{\mathbb{C}} d^2 z \frac{1}{\pi} e^{i\theta_z} |z\rangle\rangle ,$$

in modo tale da poter riscrivere  $\Xi$  come

$$\Xi = |\chi\rangle\rangle \langle\langle \chi| ,$$

da cui si vede che  $\Xi$  è senz'altro positivo, per cui è una soluzione accettabile del problema della ricerca del seed della POVM ottimale.

## Osservazioni

- È possibile anche in questo caso generalizzare quanto fatto anche a stati miscela, purché valgano le relazioni di fase

$$\rho_{z_1 z_2} = |\rho_{z_1 z_2}| e^{i(\theta_{z_1} - \theta_{z_2})} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} ,$$

cioè, in pratica, purché tali miscele siano pure in fase rispetto alla rappresentazione  $\{|z\rangle\rangle\}$ .

- Si noti che, per ogni stato puro (o puro in fase), il seed della POVM ottimale può sempre essere scritto come  $U|\chi\rangle\rangle\langle\langle\chi|U^\dagger$  con

$$\begin{cases} |\chi\rangle\rangle &= \int_{\mathbb{C}} d^2 z \frac{1}{\pi} |z\rangle\rangle \\ U &= \int_{\mathbb{C}} d^2 z e^{i\theta_z} |z\rangle\rangle\langle\langle z| . \end{cases}$$

Si può cioè notare che  $|\chi\rangle\rangle$  consiste nella “componente di Fourier a frequenza nulla” ottenuta dal set  $\{|z\rangle\rangle\}$ , analogamente con quanto avviene per le ordinarie misure di posizione, per le quali il seed è

$$|\chi\rangle = |0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |p\rangle .$$

- Nel caso puro  $|\Psi\rangle\rangle = |\psi\rangle|\psi^*\rangle$  si può fare un calcolo esplicito per il likelihood della misura ottimale: poiché vale

$$\begin{aligned} \Psi_z &= \langle\langle 0|(D^\dagger(z) \otimes \mathbb{I})|\psi\rangle|\psi^*\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \langle n|D(-z)|\psi\rangle\langle n|\psi^*\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle\psi|D(-z)|\psi\rangle , \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \langle\langle\Psi|\Xi|\Psi\rangle\rangle &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{\mathbb{C}} d^2 z |\Psi_z| \right)^2 \\ &= \left( \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 z |\langle\psi|D(z)|\psi\rangle| \right)^2 \\ &\geq 4 \left| \langle\psi| \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2 z D(z) \right) |\psi\rangle \right|^2 \\ &= 4 |\langle\psi|U_0|\psi\rangle|^2 , \end{aligned}$$

dove  $U_0$  è l'*operatore di parità*, definito da

$$U_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n |n\rangle \langle n|$$

Si noti che per lo stato -pari-  $|\psi\rangle = |0\rangle$  vale l'uguaglianza e il likelihood è 4: quindi, in un confronto con lo schema di misura covariante per  $D(z)^{\otimes 2}$  visto nel paragrafo precedente (likelihood uguale a 2), la misura covariante per  $D(z) \otimes D^\dagger(z)$  risulta decisamente migliore.

# Conclusioni

L'idea iniziale da cui era partita la tesi era quella che l'utilizzo di schemi di misura a copie multiple potesse migliorare la qualità delle stime di un qualche parametro associato ad un set di stati.

In tutti i casi studiati, in effetti, quest'idea ha trovato conferma.

È opportuno notare che il miglioramento ottenuto non è di tipo classico, nel senso che eseguire la misura ottimale su copie multiple non equivale a misurare separatamente ogni copia e a fare poi la media dei risultati.

In maniera piuttosto inaspettata, si è potuto osservare che l'origine quantistica di tale miglioramento non è necessariamente legata all'utilizzo di entanglement: essa è da ricercarsi piuttosto nel passaggio ad uno spazio di Hilbert "più vasto", quale quello ottenuto tramite tensorizzazione dei vari spazi di singola copia.

Arrivati a questo punto, ci si è chiesti se non fosse possibile sfruttare l'estensione dello spazio di Hilbert in una maniera più efficace di quanto previsto da uno schema di misure su copie identiche: a questo proposito, nei casi considerati, si è potuto mostrare come l'uso delle rappresentazioni inequivalenti  $\{U_g\}$  e  $\{U_g^*\}$  applicate ad uno stato di partenza  $|\psi\rangle|\psi^*\rangle$  porti ad ulteriori miglioramenti rispetto ad un approccio a due copie identiche.

Sarebbe auspicabile la dimostrazione di un risultato che generalizzi queste osservazioni a gruppi qualsiasi; una tale generalizzazione appare tuttavia piuttosto complessa, vista la generalità del problema.

Nel caso dei gruppi  $SU(d)$ , si è poi potuto notare che, qualora si disponga di due copie del sistema in stati iniziali diversi  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$ , si può sfruttare al massimo l'estensione allo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}^{\otimes 2}$  prendendo  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  appartenenti a due basi coniugate.

Sembra piuttosto verosimile che si possa individuare un'analogia relazione di coniugazione, che permetta di ottimizzare lo schema di misura, anche nel caso di gruppi generici, tuttavia l'estensione del precedente risultato non è immediata e può costituire un argomento di ulteriore ricerca.

Un'altra estensione si può cercare considerando stime sull'insieme covariante

ottenuto a partire da  $N$  copie del sistema ciascuna in un diverso stato puro: sarebbe interessante vedere se esiste anche in questo caso un qualche tipo di relazione di coniugazione che permetta di ottimizzare lo schema di misura.

Resta inoltre da approfondire il problema della stima su stati misti: per esempio, si potrebbe cercare la misura ottimale per uno schema di stima covariante sul set ottenuto da  $\rho \otimes \rho^*$  per applicazione della rappresentazione  $\{U_g \otimes U_g^*\}$ .

Se si tenta di risolvere questo problema per  $SU(d)$  con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si arriva ad equazioni non risolubili analiticamente: a questo proposito potrebbe essere interessante ricavare una soluzione numerica, in modo da rendere possibile anche nel caso misto il confronto con lo schema a due copie identiche.

Per quanto riguarda invece il problema di stima su insiemi covarianti ottenuti a partire da stati misti diversi da copia a copia, del tipo  $\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_N$ , si trova che già a partire da  $N = 2$  il problema di ricerca della misura ottimale diventa decisamente arduo.



# Bibliografia

- [1] R. Derka, V. Bužek, and A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 8 (1998).
- [2] G. M. D'Ariano, P. Lo Presti, and M. G. A. Paris, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 270404 (2001).
- [3] A. Chefles, *Phys. Rev. A* **65**, 052314, (2002).
- [4] L. Susskind and J. Glogower, *Physics* **1**, 49 (1964).
- [5] H. Brezis, *Analisi funzionale*, Liguori Editore, Napoli (1986).
- [6] A. S. Holevo, *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, North-Holland, Amsterdam (1982).
- [7] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton (1970).
- [8] F. Valentine, *Convex Sets*, Mc Graw Hill, New York (1964).
- [9] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1955).
- [10] P. Caldirola, R. Cirelli, and G. M. Prosperi, *Introduzione alla fisica teorica*, UTET, Torino (1982).
- [11] J. P. Gordon and W. Louisell, in P. Kelley, M. Lax and B. Tannenwold, *Physics of Quantum Electronics*, Mc Graw Hill, New York (1966).
- [12] E. B. Davis and J. T. Lewis, *Comm. Math. Phys.* **17**, 239-260 (1970).
- [13] A. S. Holevo, *Trudy Moscow Mat. Obšč.* **26**, 133 (1972).
- [14] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Springer-Verlag (seconda edizione) 1982.
- [15] M. Ozawa, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **21**, 279 (1985)

- [16] K. Kraus, *Lecture notes in Physics* **190**, Springer-Verlag (1983).
- [17] M. A. Naïmark, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **3**, 277 (1940).
- [18] M. A. Neumark, *C.R. Acad. Sci. USSR* **41**, 359 (1943).
- [19] C. W. Helstrom, *Quantum detection and estimation theory*, Academic Press, New York (1976).
- [20] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, Interscience, New York (1958).
- [21] H. F. Jones, *Groups, representations and physics*, IOP, Bristol (1990).
- [22] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York (1978).
- [23] V. Bargmann, *Ann. of Math.* **59**, 1 (1954).
- [24] J. H. Shapiro, *Physica Scripta T* **48**, 105 (1993).
- [25] J. H. Shapiro and S. R. Shepard, *Phys. Rev. A* **43**, 3795 (1991).
- [26] M. Ban, *Phys. Rev. A* **50**, 2785 (1994).
- [27] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, and M. F. Sacchi, *Phys. Lett. A* **248**, 103 (1998).
- [28] A. Luis and L. L. Sánchez-Soto, *Phys. Rev. A* **48**, 4702 (1993).
- [29] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, P. Perinotti, and M. F. Sacchi, *Phys. Lett. A* **268**, 241 (2000).
- [30] P. Perinotti, *Tesi di laurea, Università di Pavia* (A.A. 1998-1999).
- [31] G. M. D'Ariano and P. Lo Presti, *Phys. Rev. A* **64**, 042308 (2001).
- [32] K. E. Cahill and R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **177**, 1857 (1969); *Phys. Rev.* **177**, 1882 (1969).
- [33] R. M. Wilcox, *J. Math. Phys.* **8**, 962 (1967).
- [34] E. Arthurs and J. L. Kelly, *Bell Syst. Techn. Journ.* **40**, 725 (1965).
- [35] H. P. Yuen and J. H. Shapiro, *IEEE Trans. Inform. Theory* **IT 26**, 78 (1980).

- [36] J. H. Shapiro and S. S. Wagner, IEEE J. Quantum Electron. QE **20**, 803 (1984).
- [37] G. M. D'Ariano and M. F. Sacchi, Phys. Rev. A **52**, R4309 (1995).

