

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione alla tomografia quantistica</b>	<b>3</b>
1.1	Origini della tomografia quantistica . . . . .	4
1.2	Nuovo approccio alla tomografia quantistica . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Elementi di teoria dei gruppi</b>	<b>9</b>
2.1	Definizioni di base . . . . .	9
2.2	Rappresentazioni . . . . .	12
2.3	Gruppi topologici . . . . .	14
2.4	Gruppi ed algebre di Lie . . . . .	16
2.4.1	$SU(2)$ . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Tomografia di spin per una particella</b>	<b>23</b>
3.1	Preliminari matematici . . . . .	24
3.2	Formula fondamentale della tomografia . . . . .	28
3.3	Calcolo degli elementi di matrice della pattern function . . . . .	30
3.4	Apparato sperimentale . . . . .	33
3.5	Simulazioni Monte Carlo . . . . .	38

3.5.1	Stato coerente di spin . . . . .	41
3.5.2	Stato termico di spin . . . . .	44
3.6	Osservabili macroscopiche . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Tomografia di spin per sistemi composti</b>	<b>53</b>
4.1	Metodo diretto . . . . .	54
4.2	Un caso particolare: Due spin 1/2 . . . . .	56
4.3	Un altro caso particolare: Tre spin 1/2 . . . . .	63
4.4	Osservazioni sul caso generale a N spin 1/2 . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Generalizzazioni matematiche</b>	<b>68</b>
5.1	Osservazioni sulle rappresentazioni a meno di un fattore di fase	69
5.2	Gruppi finiti e gruppi di Lie compatti . . . . .	73
5.3	Sottogruppi finiti di $SU(2)$ . . . . .	78
5.4	Gruppi discreti e gruppi di Lie non compatti . . . . .	81
5.5	Estensione centrale del gruppo delle traslazioni nel piano . . .	94

# Capitolo 1

## Introduzione alla tomografia quantistica

Il termine “tomografia” circola in ambiente scientifico da numerosi anni, ma solo recentemente ha raggiunto la fisica teorica. Nata infatti in ambito medico<sup>1</sup>, la tecnica tomografica è stata nell’ultimo decennio applicata al problema della “misurazione” dello stato di un sistema quantistico. Tutte le informazioni su di un sistema fisico sono contenute in una matrice, detta matrice densità; la tomografia quantistica permette di determinare tale matrice. È evidente che il punto d’incontro tra la tomografia medica e la tomografia quantistica non si trova nello scopo, bensì come sarà chiarito nel prossimo paragrafo, nel metodo.

---

<sup>1</sup>Tomografia è la prima parola del forse più noto acronimo TAC.

## 1.1 Origini della tomografia quantistica

La tomografia medica consiste essenzialmente nel ricostruire una distribuzione di massa  $m(x, y)$  in 2 dimensioni a partire da un numero finito di proiezioni monodimensionali  $r(s, \phi)$  a diversi angoli  $\phi$ . La conoscenza di  $r(s, \phi)$  per ogni  $\phi$  determina esattamente  $m(x, y)$  secondo la trasformata inversa di Radon [2], che, adottando la notazione complessa  $m(x, y) \rightarrow m(\alpha, \alpha^*)$ , con  $\alpha \equiv x + iy$ , è espressa da:

$$m(\alpha, \alpha^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk |k|}{4} \int_0^\pi \frac{d\phi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx r(x, \phi) \exp[ik(x - \alpha_\phi)], \quad (1.1)$$

con  $\alpha_\phi \equiv \text{Re}(\alpha e^{-i\phi})$ . Scambiando gli integrali in  $k$  e  $\phi$  la (1.1) si trasforma in

$$m(\alpha, \alpha^*) = \int_0^\pi \frac{d\phi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx r(x, \phi) K(x - \alpha_\phi), \quad (1.2)$$

con la funzione  $K(z)$ , detta kernel, data da

$$K(z) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \text{Re} \frac{1}{(z + i\epsilon)^2}. \quad (1.3)$$

Nel 1989 K. Vogel e H. Risken [3] ebbero una semplice trovata che segnò la nascita della tomografia quantistica o, come sarebbe più corretto dire, della tomografia quantistica omodina<sup>2</sup>. Essi partirono dall'idea che la distribuzione

---

<sup>2</sup>Per illustrare il metodo di Vogel e Risken, conviene fare una breve digressione di ottica quantistica. In ottica quantistica è possibile misurare tutte le possibili combinazioni lineari degli operatori di posizione e momento dell'oscillatore armonico che rappresenta un modo del campo elettromagnetico. A tale scopo, come spiegato in [4], viene utilizzato un detector omodina bilanciato, che misura le "quadrature"  $\hat{x}_\phi \equiv \frac{1}{2} (a^\dagger e^{i\phi} + a e^{-i\phi})$  del campo ad una qualsiasi fase  $\phi$  rispetto all'oscillatore locale (LO) (gli operatori  $a$  e  $a^\dagger$  sono rispettivamente il distruttore ed il creatore di fotone del modo considerato).

di probabilità  $p(x, \phi)$  del risultato  $x$  della misura della quadratura  $\hat{x}_\phi$  fosse la probabilità marginale della funzione di Wigner  $W(\alpha, \alpha^*)$ <sup>3</sup> lungo la linea nel piano complesso  $\alpha = r e^{i\phi}$ , con  $r \in \mathbb{R}$ . Quindi  $W(\alpha, \alpha^*)$  sarebbe data dalla trasformata inversa di Radon delle probabilità  $p(x, \phi)$ :

$$W(\alpha, \alpha^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk |k|}{4} \int_0^\pi \frac{d\phi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x, \phi) \exp[ik(x - \alpha_\phi)]. \quad (1.5)$$

Infine, il passaggio dalla  $W(\alpha, \alpha^*)$  alla  $\rho$  si effettua con la (1.4)<sup>4</sup>. L'equazione (1.5) è la base del primo metodo tomografico quantistico. Il primo lavoro sperimentale [6] dimostrò la realizzabilità del metodo, il quale rimaneva purtuttavia solo qualitativo, per la necessità di fissare un cut-off per l'integrale in  $k$  dell'equazione (1.5) ed un campionamento istogrammatico delle probabilità  $p(x, \phi)$ . Il problema nasceva nel voler ottenere la funzione di Wigner come passo intermedio per il calcolo della  $\rho$ <sup>5</sup>. Questa difficoltà fu superata

---

<sup>3</sup>La funzione di Wigner  $W(\alpha, \alpha^*)$  è definita dalla relazione

$$W(\alpha, \alpha^*) \equiv \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\lambda}{\pi^2} e^{\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda} \text{Tr}[\rho e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a}],$$

per un sistema con matrice densità  $\rho$ . Esiste una corrispondenza biunivoca tra  $W(\alpha, \alpha^*)$  e  $\rho$ , nel senso che assegnata una  $W(\alpha, \alpha^*)$  si ottiene univocamente una  $\rho$  mediante l'equazione

$$\rho = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\lambda}{\pi} \int_{\mathbb{C}} d^2\beta W(\beta, \beta^*) e^{\lambda\beta^* - \lambda^*\beta} e^{\lambda^* a - \lambda a^\dagger}. \quad (1.4)$$

<sup>4</sup>Si può passare dalla  $W(\alpha, \alpha^*)$  alla  $\rho$  più convenientemente con altre formule una volta scelta la base dello spazio di Hilbert su cui rappresentare la  $\rho$ . Si veda ad esempio [5].

<sup>5</sup>Non volendo entrare nei dettagli della questione, ci si limiterà a rilevare che la (1.5) può essere scritta nella stessa forma della (1.2), con  $K$  come nella (1.3). La non limitatezza del kernel non permette il campionamento statistico necessario al calcolo dell'integrale analogo a (1.2), a meno che non si fissi arbitrariamente un valore di  $\epsilon$  diverso da zero nell'analogia

da G. M. D'Ariano, C. Macchiavello, M. G. A. Paris [7]. Successivamente, le formule dell'articolo [7] furono semplificate da G. M. D'Ariano, U. Leonhardt e H. Paul [8]. Come preannunciato, l'attenzione si spostò direttamente sulla  $\rho$  tralasciando la  $W(\alpha, \alpha^*)$  e, grazie all'identità operatoriale

$$\rho = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\alpha}{\pi} \text{Tr}[\rho e^{-\alpha^* a + \alpha a^\dagger}] e^{-\alpha a^\dagger + \alpha^* a}, \quad (1.6)$$

si potè ottenere con pochi facili passaggi l'equivalente quantistico della (1.2):

$$\rho = \int_0^\pi \frac{d\phi}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x, \phi) K(x - \hat{x}_\phi), \quad (1.7)$$

con  $K$  come nella (1.3) <sup>6</sup>. La (1.7) è la formula fondamentale della tomografia quantistica omodina.

La tomografia quantistica omodina fu poi migliorata e generalizzata sotto molti aspetti, ma di questo non ci si occuperà qui. Il lettore interessato può fare riferimento ai numerosi lavori citati in [5, 9, 10].

## 1.2 Nuovo approccio alla tomografia quantistica

Il punto chiave della tomografia quantistica omodina è la (1.6), che può essere riscritta come

$$\rho = \int_{\mathbb{C}} \frac{d^2\alpha}{\pi} \text{Tr}[\rho D(\alpha)] D^\dagger(\alpha), \quad (1.8)$$

---

della (1.3), dando però luogo ad errori non controllabili. Per maggiori chiarimenti ci si riferisca a [5].

<sup>6</sup>Nonostante  $K(z)$  non sia una funzione limitata, gli elementi di matrice di  $K(x - \hat{x}_\phi)$  possono esserlo, per cui non si pone più il problema nominato nella precedente nota.

con  $D(\alpha) \equiv e^{-\alpha^* a + \alpha a^\dagger}$  detto operatore di displacement. La (1.8) ha il pregio, a differenza della (1.6), di mettere in risalto nella formula che fornisce la  $\rho$  la presenza di un set di operatori che costituiscono una rappresentazione irriducibile di un gruppo astratto<sup>7</sup>. Come si vedrà, le sole proprietà delle rappresentazioni dei gruppi sono sufficienti all'ottenimento della (1.8), che assume perciò il ruolo di caso particolare di una classe di formule estremamente ampia. Questa è l'essenza del nuovo approccio alla tomografia quantistica, le cui metodologie possono essere riassunte nei seguenti punti:

1) Si individui la natura dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  associato al sistema fisico in esame<sup>8</sup>.

2) Si scelga un gruppo astratto  $\mathcal{G}$  tale che esista una sua rappresentazione irriducibile sullo spazio  $\mathcal{H}$  del punto 1).

3) Si scriva la formula analoga alla (1.8) per il caso considerato (questa parte sarà illustrata nel capitolo 5).

4) Con passaggi simili a quelli che portano dalla (1.6) alla (1.7) si trasformi la formula del punto 3) in una equazione in cui la matrice densità è espressa come media di un kernel con certe probabilità ricavabili sperimentalmente.

Nel capitolo 5 verranno ricavati degli enunciati generali che forniranno in maniera precisa indicazioni sulle classi di gruppi alle quali è possibile

---

<sup>7</sup>Gli operatori di displacement sono una rappresentazione irriducibile a meno di un fattore di fase dell'estensione centrale del gruppo di Lie delle traslazioni nel piano. Di questo si parlerà più diffusamente in seguito.

<sup>8</sup>Le formule (1.6) e la conseguente (1.7) si riferiscono alla matrice densità ridotta ad un solo modo ottico. È possibile estendere il metodo ad un numero di modi arbitrario [11].

applicare il metodo.

Prima di raggiungere il livello di generalità del capitolo 5, ci si soffermerà nel capitolo 3 sul caso particolare della matrice densità ridotta di spin di una particella elementare<sup>9</sup>. Ricordiamo che con matrice densità ridotta di spin si vuole indicare la matrice densità ottenuta eseguendo la traccia parziale sui gradi di libertà configurazionali. A differenza del caso ottico, si tratta quindi di un operatore che agisce su di uno spazio di Hilbert di dimensione finita.

Il passaggio dal punto 3) al punto 4) di cui sopra può dare luogo alla comparsa di probabilità non misurabili in pratica. Questo problema si manifesta, ad esempio, nel caso della matrice densità ridotta di spin di un sistema di più particelle. Nel capitolo 4 si cercherà di aggirare questa difficoltà almeno per un sistema di particelle identiche di spin  $1/2$ .

---

<sup>9</sup>Con particella elementare si intende un sistema fisico il cui spazio di Hilbert sostiene una rappresentazione proiettiva (a meno di un fattore di fase) del gruppo di Galilei (o di Poincarè per un sistema relativistico). Da questo punto di vista un protone può essere considerato elementare.

# Capitolo 2

## Elementi di teoria dei gruppi

Il presente capitolo non vuole essere in alcun modo un trattato di teoria dei gruppi, bensì unicamente un riepilogo dei risultati necessari alla comprensione del resto della tesi. Per questa ragione il capitolo conterrà, oltre alle necessarie definizioni, alcuni teoremi che verranno riportati senza dimostrazione. Maggiori informazioni si possono trovare nei testi [12, 26] COME SI SCRIVE [12-26] ??? della bibliografia.

### 2.1 Definizioni di base

Un gruppo  $\mathcal{G}$  è un insieme di elementi  $g$  dotato di una legge di composizione interna  $\chi$  (comunemente denominata prodotto)

$$\chi : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$$

che soddisfa i seguenti requisiti<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>Si utilizzeranno d'ora in avanti le notazioni equivalenti  $\chi(g_1, g_2)$  e  $g_1 \cdot g_2$  per rappresentare l'elemento prodotto di  $g_1$  e  $g_2$ .

1)  $\chi$  è associativa, cioè per ogni  $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$ :

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) \equiv g_1 \cdot g_2 \cdot g_3.$$

2) Esiste un unico elemento  $e \in \mathcal{G}$ , detto identità a sinistra, tale che  $e \cdot g = g$  per ogni  $g \in \mathcal{G}$ .

3) Per ogni  $g \in \mathcal{G}$  esiste un unico elemento  $g^{-1}$ , detto inverso a sinistra, tale che  $g^{-1} \cdot g = e$ .

Segue<sup>2</sup> che l'identità a sinistra sia anche un'identità a destra e che l'inverso a sinistra sia anche l'inverso a destra, ovvero:

$$g \cdot e = g, \quad g \cdot g^{-1} = e.$$

$\mathcal{G}$  è detto abeliano se  $\chi$  è commutativa, cioè se per ogni  $g_1, g_2$  è verificata l'equazione  $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$ .

Il gruppo  $\mathcal{G}$  è detto finito se è costituito da un numero finito di elementi. In tale caso il numero di elementi è chiamato ordine del gruppo. Se invece gli elementi costituissero un insieme infinito il gruppo verrebbe detto discreto o continuo a seconda che l'infinità sia numerabile o non numerabile. In

---

<sup>2</sup>Mediante le condizioni 1), 2), 3) è semplice verificare che l'inverso a sinistra di  $g \cdot h$  è  $h^{-1} \cdot g^{-1}$ . Da questa, insieme al fatto che  $e^{-1} = e$  (conseguenza delle 2) e 3)), discende

$$g \cdot g^{-1} = ((g^{-1})^{-1} \cdot g^{-1})^{-1} = e^{-1} = e,$$

cioè  $g^{-1}$  è anche l'inverso a destra di  $g$  o, volendo,  $g$  è l'inverso a sinistra di  $g^{-1}$ . Per cui

$$g \cdot e = (e \cdot g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1} = g,$$

ovvero  $e$  è anche l'identità a destra (per assurdo è possibile verificare l'unicità dell'identità a destra come conseguenza dell'unicità dell'identità a sinistra).

quest'ultimo caso gli elementi del gruppo sono caratterizzati dai valori di un insieme di parametri reali  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Se il numero  $n$  di questi parametri è finito, si è in presenza di un gruppo continuo finito e  $n$  è ancora chiamato ordine del gruppo.

Il sottoinsieme  $\tilde{\mathcal{G}}$  di  $\mathcal{G}$  è un sottogruppo di  $\mathcal{G}$  se è chiuso rispetto alla legge di composizione interna, ovvero se il prodotto di due elementi di  $\tilde{\mathcal{G}}$  appartiene a  $\tilde{\mathcal{G}}$ .

Un gruppo  $\mathcal{G}$  è il prodotto diretto dei gruppi  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k$ , e viene indicato con  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \dots \times \mathcal{G}_k$ , se è costituito dagli elementi  $g_1 g_2 \dots g_k$ , dove  $g_i \in \mathcal{G}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), con legge di composizione interna data da:

$$g_1 g_2 \dots g_k \cdot h_1 h_2 \dots h_k = (g_1 \cdot h_1)(g_2 \cdot h_2) \dots (g_k \cdot h_k).$$

Infine, come ultima definizione, si vuole considerare quella di omomorfismo e di isomorfismo tra due gruppi. Un omomorfismo tra  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}'$  è un'applicazione  $\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  che conserva il prodotto, cioè tale che:

$$\alpha(\chi(g_1, g_2)) = \chi'(\alpha(g_1), \alpha(g_2)),$$

dove  $\chi$  e  $\chi'$  sono le leggi di composizione interna di  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}'$ . Se l'omomorfismo  $\alpha$  è anche un'applicazione biunivoca allora si dice isomorfismo.

## 2.2 Rappresentazioni

Sia  $\mathcal{G}$  un gruppo e  $\mathcal{O}$  un gruppo di operatori<sup>3</sup> definiti su di uno spazio vettoriale  $V$ . Un omomorfismo  $\mathcal{D} : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}$  costituisce una rappresentazione di  $\mathcal{G}$ . Se  $\mathcal{D}$  fosse un isomorfismo, allora la rappresentazione verrebbe detta fedele. Inoltre, la rappresentazione  $\mathcal{D}$  ha dimensione finita data da  $N$ , se la dimensione di  $V$  è uguale a  $N$ .

Due rappresentazioni  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  di uno stesso gruppo  $\mathcal{G}$  sono equivalenti se esiste un operatore invertibile  $S$  tale che  $\forall g \in \mathcal{G}$  valga:

$$\mathcal{D}_1(g) = S \mathcal{D}_2(g) S^{-1}.$$

La rappresentazione  $\mathcal{D}$  di  $\mathcal{G}$  in  $V$  è detta irriducibile se non esiste in  $V$  alcun sottospazio proprio<sup>4</sup> invariante per applicazione di tutti gli operatori  $\mathcal{D}(g)$ , al variare di  $g$  in  $\mathcal{G}$ . In caso contrario è invece detta riducibile. Le proprietà basilari delle rappresentazioni irriducibili di dimensione finita si riassumono nei lemmi di Schur:

**Teorema 2.2.1 (Primo lemma di Schur)** *Siano  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$  due rappresentazioni irriducibili non equivalenti di uno stesso gruppo  $\mathcal{G}$ . Se l'operatore  $S$  soddisfa a  $\mathcal{D}_1(g) S = S \mathcal{D}_2(g)$ , per ogni  $g \in \mathcal{G}$ , allora  $S$  è l'operatore nullo.*

---

<sup>3</sup>Per semplificare la scrittura, il termine operatore verrà sempre utilizzato al posto di operatore lineare.

<sup>4</sup>Con sottospazio proprio di  $V$  si intende un sottospazio strettamente contenuto in  $V$  che non contenga il solo vettore nullo.

**Teorema 2.2.2 (Secondo lemma di Schur)** *Se la rappresentazione  $\mathcal{D}$  di  $\mathcal{G}$  è irriducibile e l'operatore  $X$  commuta con tutti gli operatori  $\mathcal{D}(g)$  allora  $X$  è un multiplo dell'operatore identità.*

Dai lemmi di Schur discende la cosiddetta “relazione di ortogonalità dei caratteri”<sup>5</sup>:

$$\frac{1}{\dim(V)} \sum_g \text{Tr}[\mathcal{D}_\mu(g)] \text{Tr}[\mathcal{D}_\nu(g^{-1})] = \delta_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

dove  $\mathcal{D}_\mu$  e  $\mathcal{D}_\nu$  sono due rappresentazioni irriducibili di uno stesso gruppo inequivalenti per  $\mu \neq \nu$ .

È anche utile un teorema generale sulle rappresentazioni di gruppi ottenuti come prodotto tensore di altri:

**Teorema 2.2.3** *Ogni rappresentazione irriducibile di dimensione finita del gruppo  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \cdots \times \mathcal{G}_k$  è equivalente al prodotto tensoriale delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k$ .*

Prima di volgere l'attenzione ai gruppi continui e alle loro rappresentazioni, si farà cenno alle rappresentazioni a raggi<sup>6</sup>. Una rappresentazione  $\mathcal{D}$  associa ad ogni  $g \in \mathcal{G}$  un operatore lineare  $\mathcal{D}(g)$  in modo che sia soddisfatta l'equazione

$$\mathcal{D}(g_1)\mathcal{D}(g_2) = \mathcal{D}(g_3) \quad \text{se} \quad g_1 \cdot g_2 = g_3. \quad (2.2)$$

---

<sup>5</sup>La (2.1), così come è scritta, ha significato per un gruppo finito. Nel paragrafo (2.4) si vedrà che tale formula, opportunamente modificata, vale anche per alcuni gruppi continui.

<sup>6</sup>Rappresentazioni a meno di un fattore di fase e rappresentazioni proiettive sono sinonimi di rappresentazioni a raggi.

Se invece della (2.2), si richiede unicamente che

$$\mathcal{D}(g_1)\mathcal{D}(g_2) = e^{i\gamma(g_1, g_2)}\mathcal{D}(g_3) \quad \text{se } g_1 \cdot g_2 = g_3, \quad (2.3)$$

con  $\gamma \in \mathbb{R}$  funzione di  $g_1$  e  $g_2$ , allora si è in presenza di una rappresentazione a raggi.

## 2.3 Gruppi topologici

Il concetto di gruppo topologico risulta dall'introduzione della definizione di continuità nel gruppo. In questo paragrafo, visti gli scopi futuri, si limiterà l'introduzione di una topologia a quei gruppi per i quali è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi del gruppo e i punti di  $\mathbb{E}^n$ , con  $\mathbb{E}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  (ovvero quei gruppi che nel paragrafo 2.1 sono stati definiti gruppi continui finiti di ordine  $n$ ).

Sia  $P_g$  il punto di  $\mathbb{E}^n$  corrispondente all'elemento  $g \in \mathcal{G}$ . Sia inoltre  $\mathcal{S}_\epsilon$  l'intorno sferico di  $P_g$  di raggio  $\epsilon$ , ossia l'insieme dei  $P' \in \mathbb{E}^n$  tali che  $|P' - P_g| < \epsilon$ . Gli elementi di  $\mathcal{G}$ , che hanno come immagine dei punti che stanno in  $\mathcal{S}_\epsilon$ , costituiscono l'intorno sferico  $\Sigma_\epsilon$  di centro  $g$  del gruppo  $\mathcal{G}$ . In altri termini,  $\Sigma_\epsilon$  è l'insieme degli elementi  $g' \in \mathcal{G}$  che soddisfano a  $|P_{g'} - P_g| < \epsilon$ . Si consideri, ora, la legge di composizione interna del gruppo e sia  $g_1 \cdot g_2 = g_3$ . La legge di composizione interna è continua in  $g_2$  se per ogni  $\epsilon > 0$  esiste  $\delta_\epsilon > 0$  tale che, per ogni  $g$  appartenente all'intorno  $\Sigma_{\delta_\epsilon}$  di  $g_2$ , l'elemento  $g_1 \cdot g$  appartenga all'intorno  $\Sigma_\epsilon$  di  $g_3$ . In simboli, il prodotto è

continuo in  $g_2$  se:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \text{ se } g \text{ soddisfa a } |P_g - P_{g_2}| < \delta_\epsilon, \text{ allora } |P_{g_1 \cdot g} - P_{g_3}| < \epsilon.$$

Similmente si definisce la continuità dell'operazione di inversione di un elemento di  $\mathcal{G}$ . Il gruppo  $\mathcal{G}$  è detto gruppo topologico se la legge di composizione interna e l'inversione sono continue<sup>7</sup>. Un gruppo topologico è compatto se l'immagine  $P_{\mathcal{G}}$  di tutti gli elementi di  $\mathcal{G}$  è compatta, cioè è un insieme di punti chiuso e limitato.

A questo punto, introdotta la definizione di gruppo topologico, si vogliono analizzare le proprietà delle rappresentazioni di tali gruppi. Si consideri una rappresentazione continua del gruppo, cioè una rappresentazione tale che se  $g \rightarrow g'$ , con  $g, g' \in \mathcal{G}$ , allora  $\mathcal{D}(g) \rightarrow \mathcal{D}(g')$ , nel senso di convergenza forte rispetto alla metrica dello spazio  $V$ <sup>8</sup>. Inoltre, si supponga che gli operatori  $\mathcal{D}(g)$  siano limitati (ovviamente questo requisito è superfluo se  $V$  ha dimensione finita). In queste ipotesi, per gruppi finiti o compatti, valgono i due seguenti risultati:

**2.3.1** *In ogni classe di rappresentazioni equivalenti c'è una rappresentazione unitaria.*

**2.3.2** *Ogni rappresentazione irriducibile ha dimensione finita.*

---

<sup>7</sup>Il concetto di gruppo topologico poteva essere introdotto in modo molto più generale, senza fare riferimento ad una particolare parametrizzazione degli elementi del gruppo. Si veda ad esempio [13].

<sup>8</sup>Lo spazio  $V$ , d'ora innanzi, deve essere considerato uno spazio di Hilbert e non un semplice spazio vettoriale.

Nel caso di gruppi non compatti vale un risultato sostanzialmente opposto:

**2.3.3** *Tutte le rappresentazioni unitarie di un gruppo non compatto, ad eccezione di quella banale<sup>9</sup>, sono infinito dimensionali.*

## 2.4 Gruppi ed algebre di Lie

Un gruppo topologico è detto gruppo di Lie di ordine  $n$  se esiste un intorno  $\varepsilon$  dell'identità  $e$  tale che:

1) I parametri  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  che individuano il sottoinsieme di  $\mathbb{E}^n$  in corrispondenza con  $\varepsilon$  secondo  $P$  sono essenziali, ovvero non è possibile esprimere alcuno di questi in termini degli altri.

2) Detta  $g$  l'applicazione inversa di  $P$ , se  $g_1 = g(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $g_2 = g(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $g_1 \cdot g_2 = g(c_1, c_2, \dots, c_n)$  e  $g_1^{-1} = g(d_1, d_2, \dots, d_n)$  appartengono a  $\varepsilon$ , allora  $c_i = c_i(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$  e  $d_i = d_i(a_1, \dots, a_n)$  sono funzioni analitiche nei loro argomenti<sup>10</sup>.

Si consideri allora un gruppo di Lie  $\mathcal{G}$  di ordine  $n$ , parametrizzato da  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , e sia  $\mathcal{D}$  una rappresentazione continua di  $\mathcal{G}$ . Gli operatori

$$X_k \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{D}(g)}{\partial a_k} \right) \Big|_{a_1=a_2=\dots=a_n=0}$$

sono detti generatori infinitesimi della rappresentazione  $\mathcal{D}$  del gruppo  $\mathcal{G}$  e

<sup>9</sup>La rappresentazione banale è quella costituita dalla sola matrice identità.

<sup>10</sup>Normalmente si scelgono i parametri  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  in modo che  $(0, 0, \dots, 0)$  corrisponda all'identità del gruppo  $e$ . Nel seguito, questa scelta sarà sempre sottintesa.

soddisfano a

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ijk} X_k,$$

con  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ . Le quantità  $c_{ijk}$ , chiamate costanti di struttura del gruppo, sono numeri reali e non dipendono dalla rappresentazione di  $\mathcal{G}$ <sup>11</sup>.

Le costanti di struttura verificano inoltre le seguenti equazioni:

$$c_{ijk} = -c_{jik} \quad (2.4)$$

$$\sum_l (c_{ijl} c_{lkh} + c_{kil} c_{ljh} + c_{jkl} c_{lih}) = 0. \quad (2.5)$$

Si consideri, ora, uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$ , che verrà indicato con  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ . Sia  $\{b_k\}$ , con  $k = 1, 2, \dots, n$ , una base di  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ . In  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$  si definisca una legge di composizione interna bilineare nel seguente modo<sup>12</sup>:

$$[x, y] = \sum_{i,j} x_i y_j [b_i, b_j] \equiv \sum_{i,j,k} x_i y_j c_{ijk} b_k. \quad (2.6)$$

In virtù delle (2.4),(2.5) la legge di composizione interna (2.6) è anche antisimmetrica e soddisfa all'identità di Jacobi. Lo spazio  $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$  dotato della operazione  $[\cdot, \cdot]$  è detto algebra di Lie associata al gruppo  $\mathcal{G}$ <sup>13</sup>.

Passiamo, adesso, all'analisi delle rappresentazioni dei gruppi di Lie<sup>14</sup>.

Sia  $\mathcal{G}$ , allora, il gruppo di Lie di ordine  $n$  parametrizzato da  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,

<sup>11</sup>Le costanti di struttura non dipendono dalla rappresentazione, ma dipendono dalla scelta della parametrizzazione di  $\mathcal{G}$ . Le costanti di struttura corrispondenti a diverse parametrizzazioni sono comunque legate tra loro da relazioni piuttosto semplici.

<sup>12</sup>I numeri  $x_i, y_i$  sono i coefficienti di Fourier di  $x, y$  sulla base  $\{b_k\}$ .

<sup>13</sup>In generale, uno spazio vettoriale reale, dotato di una legge di composizione interna bilineare, antisimmetrica e che soddisfi all'identità di Jacobi, è detto algebra di Lie.

<sup>14</sup>Non essendo strettamente necessaria, nonostante la sua importanza, verrà tralasciata una discussione sulle rappresentazioni delle algebre di Lie e sulle connessioni di queste con le rappresentazioni dei gruppi di Lie.

e sia  $\mathcal{D}$  una sua rappresentazione. Si definisce sottogruppo ad un parametro un sottogruppo di  $\mathcal{G}$  i cui elementi  $g(t)$  dipendono in modo continuo dal parametro reale  $t$ . Scegliendo in modo opportuno la parametrizzazione si possono ottenere le leggi di composizione :  $g(t_1)g(t_2) = g(t_1 + t_2)$  e  $g(0) = e$ . Gli elementi di un sottogruppo ad un parametro sono rappresentati da operatori della forma  $\mathcal{D}(a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)) \equiv \mathcal{D}(t)$ , che soddisfano a  $\mathcal{D}(t_1)\mathcal{D}(t_2) = \mathcal{D}(t_1 + t_2)$ . È possibile dimostrare, in modo piuttosto semplice, che, posto  $d_k \equiv \left. \frac{\partial a_k}{\partial t} \right|_{t=0}$ , risulta:

$$\mathcal{D}(t) = \exp \left( \sum_k d_k X_k t \right); \quad (2.7)$$

in altri termini, ogni elemento della rappresentazione del sottogruppo ad un parametro può essere espresso in termini dei generatori infinitesimi  $X_k$ . Ma c'è di più: è possibile dimostrare infatti, che ogni elemento di un gruppo di Lie connesso<sup>15</sup> appartiene ad un sottogruppo ad un parametro. L'ipotesi che la rappresentazione sia unitaria comporta, invece, l'antisimmetria degli operatori  $X_k$ . Per rappresentazioni unitarie si preferisce allora scrivere la (2.7) come:

$$\mathcal{D}(t) = \exp \left( i \sum_k d_k J_k t \right), \quad (2.8)$$

dove gli operatori  $J_k$  sono simmetrici.

---

<sup>15</sup>La definizione di connessione è la seguente:

Si consideri una applicazione continua  $f$  tra i numeri reali  $x \in [0, 1]$  e gli elementi  $g \in \mathcal{G}$ . L'insieme di elementi così ottenuti è detto cammino continuo in  $\mathcal{G}$ . Se per ogni coppia di elementi  $g, g' \in \mathcal{G}$  esiste un cammino continuo che ha  $g, g'$  come estremi, cioè  $f(0) = g$  e  $f(1) = g'$ , allora il gruppo  $\mathcal{G}$  è connesso.

Il paragrafo si chiude con il concetto di integrale invariante per un gruppo di Lie. Sia  $F$  una funzione a valori reali definita sul gruppo di Lie  $\mathcal{G}$  e si consideri l'integrale

$$\int_{\tilde{\mathcal{G}}} d\mu(g) F(g), \quad (2.9)$$

dove  $\tilde{\mathcal{G}}$  è un sottogruppo di  $\mathcal{G}$  e  $d\mu(g)$  è un elemento di volume intorno al punto  $g$  in  $\mathcal{G}$  <sup>16</sup>. Per un gruppo di Lie è sempre possibile trovare un'opportuna misura  $d\mu(g)$  invariante a sinistra, cioè tale che  $d\mu(h \cdot g) = d\mu(g)$  per ogni  $h \in \mathcal{G}$ . Come conseguenza risulta

$$\int_{\mathcal{G}} d\mu(g) F(g) = \int_{\mathcal{G}} d\mu(g) F(h^{-1} \cdot g), \quad (2.10)$$

per ogni  $h \in \mathcal{G}$ . La (2.10) è la proprietà che permette di dimostrare l'analogo della (2.1) per gruppi continui, cioè

$$\int_{\mathcal{G}} d\mu(g) \text{Tr}[\mathcal{D}_\mu(g)] \text{Tr}[\mathcal{D}_\nu(g^{-1})] = \delta_{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

dove il significato dei vari termini è lo stesso del paragrafo (2.2). È anche possibile trovare una misura invariante a destra e, in generale, questa non coincide con la misura invariante a sinistra. Tuttavia, per gruppi compatti

---

<sup>16</sup>La definizione precisa dell'integrale (2.9) è

$$\int_{\tilde{\mathcal{G}}} d\mu(g(a_1, a_2, \dots, a_n)) F(g(a_1, a_2, \dots, a_n)),$$

ovvero, è possibile attribuire significato all'integrale (2.9) introducendo una parametrizzazione del gruppo (chiaramente anche il dominio d'integrazione  $\tilde{\mathcal{G}}$  deve essere parametrizzato).

le due misure coincidono; inoltre, è sempre possibile scegliere tale misura in modo che

$$\int_{\mathcal{G}} d\mu(g) = 1. \quad (2.12)$$

Per gruppi compatti esiste quindi una misura normalizzata, invariante sia a destra che a sinistra, infine, tale misura è unica ed è detta misura invariante di Haar.

### 2.4.1 $SU(2)$

Come caso particolare di gruppo di Lie, vista la sua importanza in questa tesi, si vuole analizzare un po' più nel dettaglio il gruppo  $SU(2)$  delle matrici complesse  $2 \times 2$  unitarie con determinante uguale ad uno.  $SU(2)$  è un gruppo compatto, perciò secondo gli enunciati 2.3.1 e 2.3.2 le sue rappresentazioni, a meno di equivalenze, sono unitarie e di dimensione finita. Inoltre  $SU(2)$  è connesso, per cui ci si aspetta di potere esprimere tutti gli operatori di una sua rappresentazione in forma simile alla (2.8). Infatti, parametrizzando  $SU(2)$  mediante le variabili  $(\varphi, \vartheta, \psi)$  appartenenti a  $[0, 2\pi) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$  e definendo  $\vec{n} \equiv (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$ , si dimostra che le rappresentazioni unitarie di  $SU(2)$  possono scriversi nella forma<sup>17</sup>

$$\mathcal{R}(\varphi, \vartheta, \psi) = e^{-i\vec{J} \cdot \vec{n} \psi}, \quad (2.13)$$

dove gli operatori  $\{J_k\}$  sono i generatori infinitesimi di  $su(2)$  (l'algebra associata a  $SU(2)$ ) a meno di un fattore  $i$ . L'algebra  $su(2)$  ha come costanti di

---

<sup>17</sup>Per  $SU(2)$  il simbolo  $\mathcal{R}$  viene utilizzato al posto di  $\mathcal{D}$ .

struttura le componenti del tensore di Ricci, per cui gli operatori simmetrici  $\{J_k\}$  soddisfano a<sup>18</sup>

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k, \quad (2.14)$$

ossia alle relazioni caratteristiche dei momenti angolari. La simmetria degli operatori  $\{J_k\}$  e la (2.14) portano in definitiva al seguente risultato:

**2.4.1** *Per ogni numero  $J$  intero o semi-dispari esiste una rappresentazione irriducibile di  $SU(2)$  di dimensione  $2J + 1$  ed ha la forma (2.13). Indicando i vettori della base su cui agiscono gli operatori della rappresentazione specificata da  $J$  con  $|J, m\rangle$  ( $m = -J, -J + 1, \dots, J$ ) e fissandone le fasi relative in modo opportuno, risulta:*

$$\begin{aligned} \langle J, m' | J_x | J, m \rangle &= \frac{1}{2} (\sqrt{(J-m)(J+m+1)} \delta_{m', m+1} + \\ &\quad + \sqrt{(J+m)(J-m+1)} \delta_{m', m-1}), \\ \langle J, m' | J_y | J, m \rangle &= \frac{1}{2i} (\sqrt{(J-m)(J+m+1)} \delta_{m', m+1} - \\ &\quad - \sqrt{(J+m)(J-m+1)} \delta_{m', m-1}), \\ \langle J, m' | J_z | J, m \rangle &= m \delta_{m', m}. \end{aligned}$$

Queste relazioni definiscono completamente l'esponentiale della (2.13). A meno di equivalenze, non vi sono altre rappresentazioni irriducibili di  $SU(2)$ .

---

<sup>18</sup>Si sottointende il simbolo di somma sugli indici ripetuti.

Bisogna aggiungere che l'enunciato 2.4.1 vale nell'ipotesi in cui la parametrizzazione sia stata fissata come all'inizio di questo sottoparagrafo. Altrimenti, per un'altra parametrizzazione, gli operatori  $\mathcal{R}(g)$  assumerebbero una forma diversa, per il resto comunque l'enunciato 2.4.1 continuerebbe a valere.

La compattezza di  $SU(2)$  entra in gioco anche per quanto riguarda la misura invariante del gruppo. Secondo quanto detto alla fine del paragrafo 2.4, infatti,  $SU(2)$  è dotato di una misura di Haar, che, con la parametrizzazione adottata, è data da

$$d\mu(\vec{n}, \psi) = \frac{1}{4\pi^2} \sin^2 \frac{\psi}{2} \sin \vartheta \, d\psi \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (2.15)$$

## Capitolo 3

# Tomografia di spin per una particella

Questo capitolo inizia con l'ottenimento delle formule tomografiche per la matrice densità ridotta di spin  $\rho_s$  di una particella elementare. Secondo le considerazioni del paragrafo 1.2, si deve trovare un gruppo  $\mathcal{G}$  le cui rappresentazioni siano irriducibili in spazi  $\mathcal{H}_S$  di dimensione  $2S + 1$ <sup>1</sup>. Il teorema 2.4.1 permette di concludere immediatamente che il gruppo  $\mathcal{G}$  cercato è  $SU(2)$ <sup>2</sup>. Verrà allora dimostrata l'equazione

$$\rho_s = (2S + 1) \int d\mu(g) \operatorname{Tr}[\rho_s \mathcal{R}^\dagger(g)] \mathcal{R}(g), \quad (3.1)$$

con l'integrale esteso ad ogni  $g \in SU(2)$  e con  $d\mu(g)$  e  $R$  ad indicare rispettivamente la misura invariante di Haar e la rappresentazione irriducibile di dimensione  $2S + 1$  di  $SU(2)$ . Dalla (3.1), scegliendo la parametrizzazione

---

<sup>1</sup> $S$  è lo spin della particella.

<sup>2</sup>Poichè si sta trattando esplicitamente il caso dello spin, invece della operatore  $\vec{J}$  e del numero quantico  $J$  del sottoparagrafo 2.4.1, si preferisce utilizzare  $\vec{S}$  e  $S$ .

introdotta nel paragrafo 2.4.1, si farà discendere l'equazione<sup>3</sup>

$$\rho_s = \int \frac{d\Omega_{\vec{n}}}{4\pi} \sum_{m=-S}^S p(\vec{n}, m) K_S(m - \vec{S} \cdot \vec{n}). \quad (3.2)$$

L'analisi della stretta analogia tra le formule (3.1), (3.2) e (1.8), (1.7) sarà rinviata al capitolo 5. Il seguito del capitolo sarà infatti dedicato ad un esame dettagliato delle conseguenze della (3.2), descrivendo l'esperimento ideale risultante dalla (3.2) e proponendo alcune simulazioni numeriche a conforto della bontà del metodo.

### 3.1 Preliminari matematici

Per dimostrare l'equazione (3.1) è utile premettere tre lemmi:

**Lemma 3.1.1** *Per ogni operatore lineare  $A$  tale che  $A : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_S$ , vale la seguente identità:*

$$\int d\mu(g) \mathcal{R}^\dagger(g) A \mathcal{R}(g) = c I, \quad (3.3)$$

dove  $c \in \mathbb{C}$  e  $I$  è l'operatore identità in  $\mathcal{H}_S$ .

Dimostrazione: La dimostrazione risulta particolarmente semplice utilizzando il secondo lemma di Schur (enunciato 2.2.2). Difatti, grazie ad esso, si

---

<sup>3</sup>Il significato dei simboli è il seguente:  $d\Omega_{\vec{n}}$  rappresenta l'elemento di superficie sferica, ovvero  $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ , con dominio d'integrazione dato da tutta la sfera di raggio unitario. Il kernel  $K_S(m - \vec{S} \cdot \vec{n})$ , detto anche pattern function, è un operatore la cui definizione sarà precisata più avanti. Infine,  $p(\vec{n}, m)$  rappresenta la probabilità che una misura dell'operatore di spin  $\vec{S} \cdot \vec{n}$  fornisca l'autovalore  $m$ .

tratta di dimostrare soltanto che

$$[\mathcal{R}(h), \int d\mu(g) \mathcal{R}^\dagger(g) A \mathcal{R}(g)] = 0 \quad \forall h \in SU(2). \quad (3.4)$$

Questo risultato è garantito dalla invarianza della misura di Haar, infatti, con la posizione  $l \equiv g \cdot h^{-1}$ , si ha  $\forall h \in SU(2)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(h) \int d\mu(g) \mathcal{R}^\dagger(g) A \mathcal{R}(g) &= \int d\mu(g) \mathcal{R}(h \cdot g^{-1}) A \mathcal{R}(g) = \\ &= \int d\mu(l) \mathcal{R}(l^{-1}) A \mathcal{R}(l \cdot h) = \int d\mu(l) \mathcal{R}^\dagger(l) A \mathcal{R}(l) \mathcal{R}(h), \end{aligned}$$

che equivale alla (3.4) come volevasi.

**Lemma 3.1.2** *Sia  $|v\rangle$  un vettore normalizzato appartenente a  $\mathcal{H}_S$ , allora*

$$(2S + 1) \int d\mu(g) \mathcal{R}(g) |v\rangle \langle v| \mathcal{R}^\dagger(g) = I \quad (3.5)$$

*è un'identità.*

Dimostrazione: Indicando  $|v\rangle$  con  $|v_1\rangle$ , è possibile scegliere altri  $2S$  vettori  $\{|v_i\rangle\}$ , con  $i = 2, \dots, 2S + 1$ , tali che insieme a  $|v_1\rangle$  formino una base in  $\mathcal{H}_S$ . Utilizzando il lemma 3.1.1 per il caso particolare di  $A = |v_S\rangle \langle v_k|$ , si dimostra innanzitutto che  $\forall S, k$  e  $\forall i, l$

$$\int d\mu(g) \langle v_k | \mathcal{R}(g) |v_i\rangle \langle v_i | \mathcal{R}^\dagger(g) |v_S\rangle = \int d\mu(g) \langle v_k | \mathcal{R}(g) |v_l\rangle \langle v_l | \mathcal{R}^\dagger(g) |v_S\rangle,$$

infatti

$$\begin{aligned} \int d\mu(g) \langle v_k | \mathcal{R}(g) |v_i\rangle \langle v_i | \mathcal{R}^\dagger(g) |v_S\rangle &= \langle v_i | \int d\mu(g) \mathcal{R}^\dagger(g) |v_S\rangle \langle v_k | \mathcal{R}(g) |v_i\rangle = \\ &= \int d\mu(g) \mathcal{R}^\dagger(g) |v_S\rangle \langle v_k | \mathcal{R}(g) |v_i\rangle \langle v_i |v_i\rangle = \int d\mu(g) \mathcal{R}^\dagger(g) |v_S\rangle \langle v_k | \mathcal{R}(g) |v_l\rangle \langle v_l |v_l\rangle = \\ &= \int d\mu(g) \langle v_k | \mathcal{R}(g) |v_l\rangle \langle v_l | \mathcal{R}^\dagger(g) |v_S\rangle. \end{aligned}$$

A questo punto, facendo ricorso, oltre alla uguaglianza appena dimostrata, a  $\sum_i |v_i\rangle\langle v_i| = I$  ed alla normalizzazione della misura di Haar, si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \langle v_k | (2S + 1) \int d\mu(g) \mathcal{R}(g) |v\rangle \langle v| \mathcal{R}^\dagger(g) |v_S\rangle = \\
& = \sum_{i=1}^{2S+1} \langle v_k | \int d\mu(g) \mathcal{R}(g) |v_i\rangle \langle v_i| \mathcal{R}^\dagger(g) |v_S\rangle = \\
& = \langle v_k | \int d\mu(g) \mathcal{R}(g) \sum_{i=1}^{2S+1} |v_i\rangle \langle v_i| \mathcal{R}^\dagger(g) |v_S\rangle = \\
& = \int d\mu(g) \langle v_k | v_S\rangle = \delta_{Sk}.
\end{aligned}$$

L'uguaglianza tra il primo e l'ultimo termine vale  $\forall S, k$  ed è quindi equivalente alla (3.5).

A questo punto si può ottenere il valore di  $c$  del lemma 3.1.1. Il lemma 3.1.1 viene infatti riscritto nei seguenti termini:

**Lemma 3.1.3** *Per ogni operatore lineare  $A$  tale che  $A : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_S$ , vale la seguente identità:*

$$\text{Tr } A = (2S + 1) \int d\mu(g) \mathcal{R}^\dagger(g) A \mathcal{R}(g). \quad (3.6)$$

Dimostrazione: Grazie ai lemmi 3.1.1 e 3.1.2, si ha:

$$\begin{aligned}
\text{Tr } A & = \sum_{i=1}^{2S+1} \langle v_i | A |v_i\rangle = \sum_{i=1}^{2S+1} \langle v_i | (2S + 1) \int d\mu(g) A \mathcal{R}(g) |v\rangle \langle v| \mathcal{R}^\dagger(g) |v_i\rangle = \\
& = \sum_{i=1}^{2S+1} (2S + 1) \int d\mu(g) \langle v | \mathcal{R}^\dagger(g) |v_i\rangle \langle v_i | A \mathcal{R}(g) |v\rangle =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle v | (2S + 1) \int d\mu(g) \mathcal{R}^\dagger(g) A \mathcal{R}(g) | v \rangle = \\
&= (2S + 1) \int d\mu(g) \mathcal{R}^\dagger(g) A \mathcal{R}(g).
\end{aligned}$$

Mediante l'enunciato 3.1.3 si può dare una dimostrazione piuttosto diretta dell'equazione (3.1), che verrà posta sotto forma di teorema.

**Teorema 3.1.4** *L'identità operatoriale*

$$A = (2S + 1) \int d\mu(g) \text{Tr}[A \mathcal{R}^\dagger(g)] \mathcal{R}(g)$$

è valida per ogni operatore lineare  $A : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_S$ .

Dimostrazione: Utilizzando due volte il lemma 3.1.3 è possibile scrivere:

$$\begin{aligned}
&(2S + 1) \int d\mu(g) \text{Tr}[A \mathcal{R}^\dagger(g)] \mathcal{R}(g) \\
&= (2S + 1)^2 \int d\mu(g) \int d\mu(g') \mathcal{R}^\dagger(g') A \mathcal{R}^\dagger(g) \mathcal{R}(g') \mathcal{R}(g) \\
&= (2S + 1) \int d\mu(g') \mathcal{R}^\dagger(g') A \text{Tr}[\mathcal{R}(g')] \\
&= (2S + 1) \left[ \int d\mu(g') \text{Tr}[\mathcal{R}(g')] \mathcal{R}^\dagger(g') \right] A. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Sfruttando ancora il secondo lemma di Schur, si dimostra facilmente che l'operatore  $\int d\mu(g') \text{Tr}[\mathcal{R}(g')] \mathcal{R}^\dagger(g')$  è un multiplo dell'operatore identità. Infatti, osservando che<sup>4</sup>

$$\text{Tr}[\mathcal{R}(h^{-1} \cdot l \cdot h)] = \text{Tr}[\mathcal{R}(l)] \quad \forall h, l \in \mathcal{G}, \tag{3.8}$$

---

<sup>4</sup>L'uguaglianza (3.8) risulta da  $\mathcal{R}(h^{-1} \cdot l \cdot h) = \mathcal{R}(h^{-1}) \mathcal{R}(l) \mathcal{R}(h)$  e dall'invarianza per permutazione ciclica della traccia.

e ponendo  $l \equiv h \cdot g \cdot h^{-1}$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(h) \int d\mu(g) \text{Tr}[\mathcal{R}(g)] \mathcal{R}^\dagger(g) &= \int d\mu(g) \text{Tr}[\mathcal{R}(g)] \mathcal{R}(h \cdot g^{-1}) = \\ &= \int d\mu(l) \text{Tr}[\mathcal{R}(h^{-1} \cdot l \cdot h)] \mathcal{R}(l^{-1} \cdot h) = \int d\mu(l) \text{Tr}[\mathcal{R}(l)] \mathcal{R}^\dagger(l) \mathcal{R}(h), \end{aligned}$$

che equivale a

$$[\mathcal{R}(h), \int d\mu(g) \text{Tr}[\mathcal{R}(g)] \mathcal{R}^\dagger(g)] = 0 \quad \forall h \in SU(2). \quad (3.9)$$

La (3.9), per il secondo lemma di Schur, comporta

$$\int d\mu(g) \text{Tr}[\mathcal{R}(g)] \mathcal{R}^\dagger(g) = \tilde{c} I \quad \text{con } \tilde{c} \in \mathbb{C}. \quad (3.10)$$

Per valutare  $\tilde{c}$ , basta calcolare la traccia di entrambi i membri della (3.10) tenendo presente la (2.11):

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left[ \int d\mu(g) \text{Tr}[\mathcal{R}(g)] \mathcal{R}^\dagger(g) \right] &= \int d\mu(g) \text{Tr}[\mathcal{R}(g)] \text{Tr}[\mathcal{R}(g^{-1})] = 1 \\ \text{Tr}[\tilde{c} I] &= \tilde{c} (2S + 1) \end{aligned}$$

Per confronto, si deduce  $\tilde{c} = (2S + 1)^{-1}$ , ovvero

$$(2S + 1) \int d\mu(g) \text{Tr}[\mathcal{R}(g)] \mathcal{R}^\dagger(g) = I$$

e ricordando la (3.7) si ottiene la tesi del teorema.

## 3.2 Formula fondamentale della tomografia

In questo paragrafo viene ottenuta la formula (3.2). Per passare dalla (3.1) alla (3.2) basta introdurre la parametrizzazione di  $SU(2)$  del sottoparagrafo

2.4.1. Ricordando infatti le (2.13) e (2.15) e scegliendo  $\rho_s$  come operatore  $A$ , la (3.1) diventa

$$\rho_s = \frac{(2S+1)}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\psi \sin^2 \frac{\psi}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \operatorname{Tr} [\rho_s e^{i\vec{S}\cdot\vec{n}\psi}] e^{-i\vec{S}\cdot\vec{n}\psi}. \quad (3.11)$$

Se si indicano con  $|\vec{n}, m\rangle$  gli autovettori dell'operatore  $\vec{S} \cdot \vec{n}$  relativi all'autovalore  $m$ , la (3.11) dà luogo a:

$$\begin{aligned} \rho_s &= \frac{(2S+1)}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\psi \sin^2 \frac{\psi}{2} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{m=-S}^S \langle \vec{n}, m | \rho_s | \vec{n}, m \rangle e^{i\psi(m-\vec{S}\cdot\vec{n})} = \\ &= \int \frac{d\Omega_{\vec{n}}}{4\pi} \sum_{m=-S}^S \langle \vec{n}, m | \rho_s | \vec{n}, m \rangle (2S+1) \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\sin^2 \frac{\psi}{2}}{\pi} e^{i\psi(m-\vec{S}\cdot\vec{n})}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Il significato di  $\langle \vec{n}, m | \rho_s | \vec{n}, m \rangle$  è semplicemente quello di probabilità di ottenere l'autovalore  $m$  misurando l'operatore  $\vec{S} \cdot \vec{n}$  per un sistema descritto da una matrice densità  $\rho_s$ . Cioè  $\langle \vec{n}, m | \rho_s | \vec{n}, m \rangle = p(\vec{n}, m)$ , secondo quanto precisato all'inizio di questo capitolo. Per cui con la posizione

$$K_S(m - \vec{S} \cdot \vec{n}) \equiv (2S+1) \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\sin^2 \frac{\psi}{2}}{\pi} e^{i\psi(m-\vec{S}\cdot\vec{n})}, \quad (3.13)$$

la (3.12) diventa

$$\rho_s = \sum_{m=-S}^S \int \frac{d\Omega_{\vec{n}}}{4\pi} p(\vec{n}, m) K_S(m - \vec{S} \cdot \vec{n}),$$

ovvero la (3.2).

È chiaro che la conoscenza di tutti gli elementi di matrice di  $\rho_s$  su di una base fissata, è equivalente alla conoscenza della  $\rho_s$  stessa. Tuttavia, a

differenza della  $\rho_s$ , gli elementi di matrice di questa possono essere misurati essendo dei numeri. Perciò, è conveniente scrivere la (3.2) in termini matriciali fissando una base  $|a_k\rangle$  :

$$(\rho_s)_{il} \equiv \langle a_i | \rho_s | a_l \rangle = \sum_{m=-S}^S \int \frac{d\Omega_{\vec{n}}}{4\pi} p(\vec{n}, m) \langle a_i | K_S(m - \vec{S} \cdot \vec{n}) | a_l \rangle. \quad (3.14)$$

Per misurare  $\rho_s$ , si devono allora misurare tutte le probabilità  $p(\vec{n}, m)$  al variare di  $\vec{n}$  e  $m$  e calcolare esplicitamente  $\langle a_i | K_S(m - \vec{S} \cdot \vec{n}) | a_l \rangle \quad \forall i, S$ . Questi due punti saranno discussi nei prossimi paragrafi.

### 3.3 Calcolo degli elementi di matrice della pattern function

Seguendo quanto delineato alla fine del precedente paragrafo, ci si pone ora il problema di calcolare gli elementi di matrice della pattern function. Il calcolo, sebbene macchinoso, può essere svolto in maniera diretta:

$$\begin{aligned} \langle a_i | K_S(m - \vec{S} \cdot \vec{n}) | a_l \rangle &= \langle a_i | (2S + 1) \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\sin^2 \frac{\psi}{2}}{\pi} e^{i\psi(m - \vec{S} \cdot \vec{n})} | a_l \rangle = \\ &= (2S + 1) \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\sin^2 \frac{\psi}{2}}{\pi} \sum_{m'=-S}^S e^{i\psi(m-m')} \langle a_i | \vec{n}, m' \rangle \langle \vec{n}, m' | a_l \rangle = \\ &= (2S + 1) \int_0^{2\pi} d\psi \frac{2 - e^{i\psi} - e^{-i\psi}}{4\pi} \sum_{m'=-S}^S e^{i\psi(m-m')} \langle a_i | \vec{n}, m' \rangle \langle \vec{n}, m' | a_l \rangle = \\ &= (2S + 1) \sum_{m'=-S}^S \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{4\pi} \left( 2e^{i\psi(m-m')} - e^{i\psi(m-m'+1)} - e^{i\psi(m-m'-1)} \right) \times \\ &\quad \times \langle a_i | \vec{n}, m' \rangle \langle \vec{n}, m' | a_l \rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2S + 1) \left[ \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{4\pi} \left( 2\langle a_i | \vec{n}, m \rangle \langle \vec{n}, m | a_i \rangle - \langle a_i | \vec{n}, m + 1 \rangle \langle \vec{n}, m + 1 | a_i \rangle \right) \right] - \\
&\quad - (2S + 1) \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{4\pi} \langle a_i | \vec{n}, m - 1 \rangle \langle \vec{n}, m - 1 | a_i \rangle = \\
&= (2S + 1) \left[ \langle a_i | \vec{n}, m \rangle \langle a_i | \vec{n}, m \rangle^* - \frac{1}{2} \langle a_i | \vec{n}, m + 1 \rangle \langle a_i | \vec{n}, m + 1 \rangle^* \right] - \\
&\quad - \frac{1}{2} (2S + 1) \langle a_i | \vec{n}, m - 1 \rangle \langle a_i | \vec{n}, m - 1 \rangle^*. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

La scelta più comoda della base su cui calcolare  $K_S(m - \vec{S} \cdot \vec{n})$  è quella degli autostati di  $S_z$ , che verranno indicati per semplicità con  $|i\rangle$ ,  $|l\rangle$ , ecc... (invece della notazione più complessa  $|\vec{n}_z, i\rangle$ ,  $|\vec{n}_z, l\rangle$ , ecc...). Fissando appunto tale base e definendo  $\lambda_{i,m}^{\vec{n}} \equiv \langle i | \vec{n}, m \rangle$  la (3.15) diventa:

$$\langle i | K_S(m - \vec{S} \cdot \vec{n}) | l \rangle = (2S + 1) \left[ \lambda_{i,m}^{\vec{n}} (\lambda_{l,m}^{\vec{n}})^* - \frac{1}{2} \left[ \lambda_{i,m+1}^{\vec{n}} (\lambda_{l,m+1}^{\vec{n}})^* + \lambda_{i,m-1}^{\vec{n}} (\lambda_{l,m-1}^{\vec{n}})^* \right] \right]$$

ed il problema si riduce sostanzialmente a quello di calcolare

$$\lambda_{l,m}^{\vec{n}} \quad \forall l, m, \vec{n},$$

che è quanto ci si ripropone di fare nella rimanente parte di questo paragrafo.

Utilizzando per il primo ed il penultimo passaggio i risultati delle note,

si arriva al seguente risultato<sup>5</sup> <sup>6</sup>:

$$\begin{aligned}
\lambda_{l,m}^{\vec{n}} &= \langle l | \vec{n}, m \rangle = \langle l | e^{-i\vartheta \vec{S} \cdot \vec{n}_\perp} | m \rangle = \langle l | e^{-i\vartheta(-S_x \sin \varphi + S_y \cos \varphi)} | m \rangle = \\
&= \langle l | e^{-i\frac{\vartheta}{2} \left[ -\sin \varphi \left( \frac{S_+ + S_-}{2} \right) + \cos \varphi \left( \frac{S_+ - S_-}{2i} \right) \right]} | m \rangle = \langle l | e^{-i\frac{\vartheta}{2} \left[ e^{-i(\varphi + \frac{\pi}{2})} S_+ + e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} S_- \right]} | m \rangle = \\
&= \langle l | e^{-i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z} e^{-i\vartheta S_x} e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z} | m \rangle = e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})(m-l)} \langle l | e^{-i\vartheta S_x} | m \rangle.
\end{aligned}$$

Ora, poichè  $S_y = e^{-i\frac{\pi}{2} S_z} S_x e^{i\frac{\pi}{2} S_z}$  e quindi  $e^{-i\vartheta S_x} = e^{i\frac{\pi}{2} S_z} e^{-i\vartheta S_y} e^{-i\frac{\pi}{2} S_z}$ , si ricava finalmente:

$$\begin{aligned}
\lambda_{l,m}^{\vec{n}} &= e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})(m-l)} \langle l | e^{i\frac{\pi}{2} S_z} e^{-i\vartheta S_y} e^{-i\frac{\pi}{2} S_z} | m \rangle = e^{i\varphi(m-l)} \langle l | e^{-i\vartheta S_y} | m \rangle = \\
&= e^{i\varphi(m-l)} \sqrt{(S+m)!(S-m)!(S+l)!(S-l)!} \times \\
&\quad \times \sum_{\nu} \frac{(-1)^\nu (\cos \frac{\vartheta}{2})^{2S+m-l-2\nu} (-\sin \frac{\vartheta}{2})^{l-m+2\nu}}{(S-l-\nu)!(S+m-\nu)!(\nu+l-m)!\nu!},
\end{aligned}$$

dove la somma include i valori interi di  $\nu$  per cui l'argomento dei fattoriali non diventa negativo. Nell'ultima uguglianza è stata utilizzata una formula dovuta a Wigner (si veda [16]).

<sup>5</sup>Poichè  $\vec{S} \cdot \vec{n} = e^{-i\vartheta \vec{S} \cdot \vec{n}_\perp} S_z e^{i\vartheta \vec{S} \cdot \vec{n}_\perp}$ , con  $\vec{n}_\perp$  versore dell'asse di rotazione che porta l'asse  $z$  nell'asse  $\vec{n}$  (per cui  $\vec{n}_\perp = (\sin \frac{\pi}{2} \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}), \sin \frac{\pi}{2} \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}), \cos \frac{\pi}{2}) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ , essendo  $\vec{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ ), si ha:

$$|\vec{n}, m\rangle = e^{-i\vartheta \vec{S} \cdot \vec{n}_\perp} |m\rangle. \quad (3.16)$$

Infatti  $\vec{S} \cdot \vec{n} |\vec{n}, m\rangle = m |\vec{n}, m\rangle$  diventa  $\vec{S} \cdot \vec{n} = e^{-i\vartheta \vec{S} \cdot \vec{n}_\perp} S_z e^{i\vartheta \vec{S} \cdot \vec{n}_\perp} |\vec{n}, m\rangle = m |\vec{n}, m\rangle$  da cui  $S_z e^{i\vartheta \vec{S} \cdot \vec{n}_\perp} |\vec{n}, m\rangle = m e^{i\vartheta \vec{S} \cdot \vec{n}_\perp} |\vec{n}, m\rangle = m |\vec{n}, m\rangle$ , per cui  $e^{i\vartheta \vec{S} \cdot \vec{n}_\perp} |\vec{n}, m\rangle = m |\vec{n}, m\rangle = |m\rangle$ , ovvero  $|\vec{n}, m\rangle = e^{-i\vartheta \vec{S} \cdot \vec{n}_\perp} |m\rangle$ .

<sup>6</sup>Innanzitutto  $\frac{1}{2} [S_+ e^{-i(\varphi + \frac{\pi}{2})} + S_- e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})}] = e^{-i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z} \left[ \frac{S_+ + S_-}{2} \right] e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z}$ , infatti  $S_+ + (-i(\varphi + \frac{\pi}{2}))[S_z, S_+] + (-i(\varphi + \frac{\pi}{2}))^2 [S_z, [S_z, S_+]] + \dots = e^{-i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z} S_+$  e lo stesso per  $S_-$ , se non per un segno cambiato. Quindi  $\exp \left[ -i\frac{\vartheta}{2} (e^{-i(\varphi + \frac{\pi}{2})} S_+ + e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} S_-) \right] = \exp \left[ -i\vartheta (e^{-i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z} S_x e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z}) \right] = \sum_n \frac{[-i\vartheta (e^{-i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z} S_x e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z})]^n}{n!} = \sum_n \frac{(-i\vartheta)^n}{n!} e^{-i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z} S_x^n e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z} = e^{-i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z} e^{-i\vartheta S_x} e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2}) S_z}$ .

### 3.4 Apparato sperimentale

Per completare la discussione su come utilizzare la (3.2) (o equivalentemente la (3.14)), si vuole adesso descrivere il metodo per la determinazione di  $p(\vec{n}, m)$  per ogni valore di  $\vec{n}, m$ . L'apparato che realizza la misura di  $p(\vec{n}, m)$  descritto in questo paragrafo può essere utilizzato unicamente per particelle elementari elettricamente neutre. Questa limitazione è legata all'impossibilità di realizzare un esperimento di tipo Gerlach–Stern con particelle cariche, in quanto, a causa dell'interazione tra il momento magnetico orbitale ed il gradiente di campo magnetico, il fascio iniziale viene separato in un numero di fasci maggiore di  $2S+1$ <sup>7</sup>. Nel caso di particelle scariche, invece, l'interazione col campo è attribuibile unicamente allo spin: per questo motivo la descrizione dell'esperimento può essere svolta considerando solamente il ruolo della parte di spin della funzione d'onda.

Facendo riferimento alla Fig. 3.1, si supponga di avere un fascio di particelle dello stesso tipo, non interagenti. Lo stato di spin di ciascuna sia descritto dalla matrice densità ridotta  $\rho_s$ , ottenuta dalla matrice densità di particella singola tracciando sui gradi di libertà configurazionali. Il fascio inizialmente attraversa un filtro Fizeau<sup>8</sup>, necessario affinché il tempo  $t$  di

---

<sup>7</sup>Non è possibile evitare questa difficoltà ipotizzando che lo stato iniziale della particella sia un autostato del momento orbitale con autovalore nullo, poichè la particella incidente, dovendo avere proprietà di propagazione rettilinea, è in uno stato risultante dalla sovrapposizione di onde piane con coefficienti piccati intorno ad un certo valore del momento lineare.

<sup>8</sup>Il filtro Fizeau è costituito da due dischi coassiali muniti di una fenditura e ruotanti a

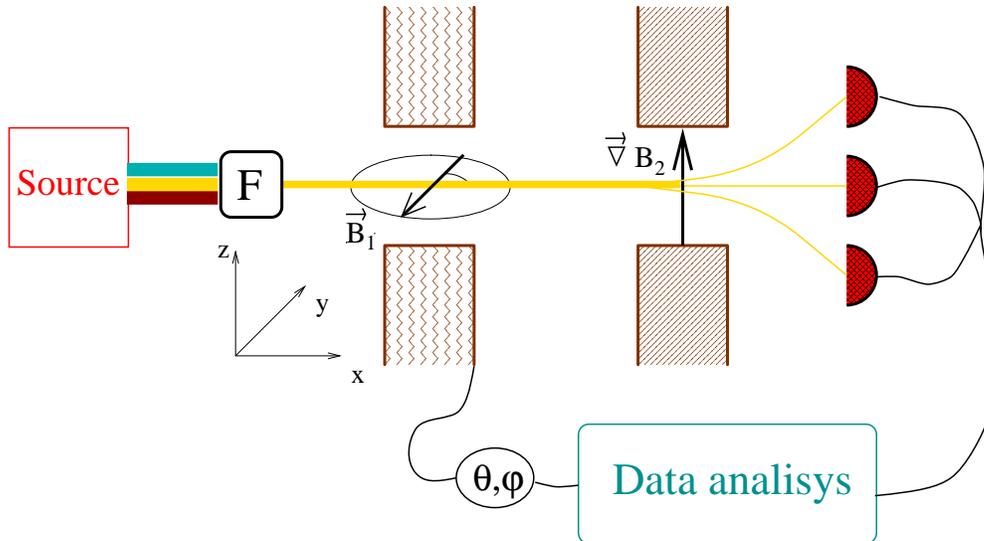


Figura 3.1: Apparato sperimentale per la tomografia di spin ad una particella. Il filtro Fizeau (F nella figura) seleziona dal fascio entrante particelle con la stessa velocità. Queste attraversano poi un campo magnetico  $\vec{B}_1$  che forma un angolo  $\varphi$  con l'asse  $y$  ed ha intensità proporzionale a  $\vartheta$ . Successivamente, le particelle sono sottoposte ad un gradiente di campo magnetico  $\vec{\nabla} B_2$  che separa il fascio come nell'esperimento di Gerlach–Stern (nella figura è stato considerato come esempio il caso di  $S = 1$ ). Infine, i rivelatori conteggiano il numero di sistemi deviati nelle varie direzioni. Questi risultati vengono correlati da un computer con i parametri  $\vartheta$  e  $\varphi$  (che nel corso dell'esperimento devono essere più volte variati) in modo da ricostruire  $\rho_s$  in accordo alla (3.2).

attraversamento del primo magnete sia uguale per tutte le particelle. Alla uscita dal filtro Fizeau il fascio si è assottigliato (avendo permesso alle sole particelle con una velocità selezionata di passare) e le rimanenti particelle entrano nel campo magnetico  $\vec{B}_1$ . Questo campo viene scelto della seguente

---

velocità diverse. Sfruttando la differenza nelle velocità angolari, è possibile fare in modo che solo le particelle con una certa velocità superino entrambi i dischi. Non è strettamente necessario utilizzare un filtro Fizeau: qualsiasi collimatore in velocità andrebbe altrettanto bene.

forma:

$$\vec{B}_1 = B_1 \vec{n}_\perp = B_1(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad (3.17)$$

in questo modo lo stato di una particella dopo avere attraversato  $\vec{B}_1$  diventa  $U \rho_s U^\dagger$ , con<sup>9</sup>

$$U = \exp[-i \gamma B_1 (S_x \sin \varphi - S_y \cos \varphi) t] . \quad (3.18)$$

Infine, le particelle sono sottoposte ad un gradiente di campo magnetico  $\vec{\nabla} B_2$  diretto lungo l'asse  $z$ . Tale gradiente separa il fascio in  $2S+1$  parti, dando la possibilità di misurare l'operatore  $S_z$ <sup>10</sup>, esattamente come nell'esperimento di Gerlach-Stern. Tuttavia, lo stato entrante nel secondo magnete è  $U \rho_s U^\dagger$  e non  $\rho_s$ . Perciò vengono misurate le probabilità  $\langle m | U \rho_s U^\dagger | m \rangle$  (per ogni  $m$ ), ma per la (3.18) queste sono uguali a<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} & \langle m | e^{-i \gamma B_1 (S_x \sin \varphi - S_y \cos \varphi) t} \rho_s e^{i \gamma B_1 (S_x \sin \varphi - S_y \cos \varphi) t} | m \rangle = \\ & = \langle m | e^{i \vartheta (S_x \sin \varphi - S_y \cos \varphi)} \rho_s e^{-i \vartheta (S_x \sin \varphi - S_y \cos \varphi)} | m \rangle = \langle \vec{n}, m | \rho_s | \vec{n}, m \rangle = p(\vec{n}, m). \end{aligned}$$

Questo dimostra che l'apparato della figura 3.1 fornisce  $p(\vec{n}, m)$ . Gli angoli polari  $\varphi, \vartheta$ , che definiscono  $\vec{n}$ , sono fissati dalla scelta del campo  $\vec{B}_1$ , ovvero  $\varphi$  è determinato dalla direzione di  $\vec{B}_1$  nel piano  $x-y$  (secondo la (3.17)), mentre

---

<sup>9</sup>L'hamiltoniana nel campo  $B_1$  è  $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_1$ , con  $\vec{\mu} = \gamma \hbar \vec{S}$ , dove  $\vec{\mu}$  è il momento magnetico intrinseco e  $\gamma$  il rapporto giromagnetico (i momenti angolari sono in unità  $\hbar$  dall'inizio). Allora  $H = -\gamma \hbar B_1 (-S_x \sin \varphi + S_y \cos \varphi)$ , da cui la (3.18) essendo  $U = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$ .

<sup>10</sup>Ovviamente con misura di un operatore si intende la misura delle probabilità di ottenere ciascuno dei suoi autovalori.

<sup>11</sup>Si scelga  $B_1 = \frac{\vartheta}{\gamma t}$  e si utilizzi nella penultima uguaglianza la formula (3.16).

$\vartheta$  è determinato dall'intensità di  $\vec{B}_1$  secondo la relazione della nota, che per comodità viene riscritta:

$$B_1 = \frac{\vartheta}{\gamma t}. \quad (3.19)$$

Naturalmente, dovendo misurare  $p(\vec{n}, m)$  per ogni  $\vec{n}$ , si deve fare ruotare  $\vec{B}_1$  nel piano  $x-y$  ( $\varphi$  deve assumere tutti i valori tra 0 e  $2\pi$ ) e variarne l'intensità tra 0 e  $|\frac{\pi}{\gamma t}|$ <sup>12</sup>. I parametri  $\varphi$  e  $\vartheta$  vengono poi correlati ai risultati ottenuti presso i rivelatori mediante un computer.

Affinchè l'apparato possa essere effettivamente realizzato, è necessario che i valori che deve assumere l'intensità di campo  $B_1$  siano sperimentalmente ottenibili e che, allo stesso tempo, il valore massimo non sia troppo piccolo per potere discriminare tra i diversi valori intermedi. Per analizzare questo problema, si supponga che i magneti che realizzano  $\vec{B}_1$  abbiano una lunghezza di 1 cm e che la velocità delle particelle nel fascio sia compresa tra  $10^5$  cm/sec (dell'ordine della velocità dei componenti di un gas all'equilibrio termico) e  $10^8$  cm/sec (come si potrebbe ottenere con un tubo catodico); questi valori comportano un tempo di volo  $t$  contenuto nell'intervallo  $[10^{-8}, 10^{-5}]$  sec. Va sottolineato che il tempo di volo è un parametro controllabile dallo sperimentatore per mezzo del filtro Fizeau (o eventualmente modificando la lunghezza del primo magnete). L'altro parametro che determina  $B_1$  è  $\gamma$ , che è invece fisso dipendendo dal tipo di particella in esame. A titolo di esempio,

---

<sup>12</sup>Se  $\gamma$  fosse negativo, allora per la (3.19) anche  $B_1$  dovrebbe essere negativo. Questa circostanza va interpretata semplicemente come un'inversione nella direzione di  $\vec{B}_1$  rispetto a quanto indicato dalla (3.17), tuttavia l'intensità è chiaramente sempre positiva.

si consideri il caso di un fascio di neutroni<sup>13</sup>. Questi sono caratterizzati da<sup>14</sup>  $\gamma = 3.86 \frac{M_N}{\hbar} = 1.849 \times 10^4 \frac{1}{\text{gauss} \cdot \text{sec}}$ , quindi, indicando con  $B_{1_{max}}$  il massimo valore di  $B_1$  fissati i parametri  $t$  e  $\gamma$ , ovvero  $B_{1_{max}} \equiv \frac{\pi}{\gamma t}$ , si ottiene la possibilità di scegliere  $B_{1_{max}}$ , variando opportunamente  $t$ <sup>15</sup>, in un intervallo che va dalla decina di gauss a  $10^4$  gauss (interessano solo gli ordini di grandezza). I valori di  $B_1$  calcolati sono ottenibili in laboratorio con l'attuale tecnologia. Con un calcolo analogo, si potrebbe verificare che anche nel caso di<sup>16</sup>  $\gamma \sim \frac{M_B}{\hbar}$  risultano valori di  $B_1$  comodamente realizzabili sperimentalmente, essendo approssimativamente compresi tra un centesimo ed una decina di gauss.

Questo conclude l'analisi dell'apparato sperimentale. Si potrebbe, a questo punto, obiettare che sia necessaria un'infinità non numerabile di misure per ricostruire lo stato con la (3.2). Purtroppo ciò è vero. Tuttavia, il calcolo dell'integrale della (3.2) con il metodo Monte Carlo garantisce che gli elementi di matrice ricostruiti con un numero finito di misure siano affetti solo da un errore statistico controllabile, che può essere reso piccolo a piacere aumentando il numero di misure. Queste considerazioni saranno argomento

---

<sup>13</sup>Qui i neutroni devono essere immaginati come particelle elementari e non come un sistema composto da tre quark.

<sup>14</sup> $M_N$  è il magnetone nucleare.

<sup>15</sup>Si potrebbe anche pensare al problema sperimentale in termini inversi: se fosse più agevole ottenere diversi valori di  $B_1$  invece che di  $t$ , allora andrebbe scelto un  $B_{1_{max}}$  corrispondente ad uno dei valori di  $t$  realizzabili.

<sup>16</sup> $M_B$  è il magnetone di Bohr.

del prossimo paragrafo<sup>17</sup>.

## 3.5 Simulazioni Monte Carlo

Il metodo Monte Carlo permette di calcolare approssimativamente somme contenenti un gran numero di addendi (nel caso peggiore una serie) oppure integrali, riducendo queste a somme con un numero ragionevole di addendi (con ragionevole si intende che il loro numero può essere fissato a piacimento, è chiaro che più se ne aggiungono, più risulterà precisa l'approssimazione). Il procedimento consiste nel pensare alla somma (o all'integrale) in considerazione come al valore medio della funzione che si somma (o si integra) su una certa distribuzione di probabilità  $p(x)$ . Ora, simulando un gran nu-

---

<sup>17</sup>Esistono due metodi per la ricostruzione dello stato di spin di una particella elementare con un numero finito di misure. Entrambi, tuttavia, presentano certe difficoltà, per cui non sono preferibili al metodo di questo capitolo (se non per due casi particolari, si veda più avanti in questa nota). Il primo, proposto da R.G. Newton e B.-L. Young [33], prevede la possibilità di esprimere gli elementi di matrice di  $\rho_s$  misurando la componente di  $\vec{S}$  in  $4S+1$  direzioni. Il grosso problema di questo procedimento consiste nel fatto che gli elementi di matrice ottenuti dipendono dalle  $4S+1$  direzioni scelte, a meno che le misure siano esenti da qualsiasi forma di errore. Ora, non essendo quest'ultima circostanza possibile, bisognerebbe ovviare a questo problema ripetendo un gran numero di misure variando le  $4S+1$  direzioni, per poi mediane i risultati. In questo senso, anche con questo metodo, per avere il risultato esatto sono necessarie infinite misure. Altrimenti, ci si può limitare ad un risultato affetto da errore, che però, a differenza del metodo tomografico qui proposto, non è direttamente valutabile. Il secondo metodo invece risulta come caso particolare del teorema 5.2.2 e, pur non presentando il problema del metodo di Newton-Young, è per ora limitato solo ai casi  $S = 1/2$  e  $S = 1$ . Per questi valori dello spin, è comunque vantaggioso usare le (5.16), (5.20) invece della (3.2).

L'articolo di Newton e Young non è chiaramente l'unico su questo argomento. Il problema della ricostruzione della matrice densità è stato largamente studiato negli ultimi trent'anni. Tutti i riferimenti bibliografici dal numero [33] a [La bibliografia va sistemata] si riferiscono ad articoli che vertono su questo tema. Rimane il fatto che il metodo tomografico si distingue per la sua duttilità nel poter essere adattato a sistemi estremamente diversi, pur partendo dall'unica equazione (5.35).

mero (idealmente infinito) di punti distribuiti secondo la curva di probabilità  $p(x)$ , è possibile calcolare direttamente il valore medio, non essendo altro che la somma dei valori della funzione nei punti generati stocasticamente diviso per il numero di tali punti. È indubbiamente più semplice spiegare l'idea in simboli; quindi consideriamo, ad esempio il calcolo di un integrale:

Sia  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  e  $p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una distribuzione di probabilità. Il metodo Monte Carlo consiste nel calcolare<sup>18</sup>  $\int f(x) p(x) dx$  nel seguente modo:

$$\int f(x) p(x) dx = \langle f \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \approx \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M f(x_n), \quad (3.20)$$

dove i punti  $x_n$  sono distribuiti secondo la  $p(x)$ . Evidentemente, l'approssimazione consiste nel limitare il numero dei punti  $x_n$  ad un valore finito  $M$ <sup>19</sup>. L'errore che si commette in tale operazione è prevedibile grazie al teorema del limite centrale. Secondo questo teorema, per funzioni  $f(x)$  con momenti limitati fino al terzo ordine, la variabile casuale  $F_M \equiv \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M f(x_n)$  tende ad una distribuzione gaussiana per  $M \rightarrow \infty$ , con media  $\langle f \rangle$  e varianza  $\epsilon_M \equiv \langle \frac{[\Delta f^2]}{M} \rangle$ . Se allora le ipotesi del teorema del limite centrale sono ve-

<sup>18</sup>Quando non viene esplicitamente indicato, il dominio di integrazione è  $\mathbb{R}^d$ .

<sup>19</sup>Lo stesso ragionamento si potrebbe fare per il calcolo di  $\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) p(x_j)$ , con  $x_j$  appartenente ad un insieme  $\mathcal{I}$  in corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{N}$  e strettamente contenuto in  $\mathbb{R}^d$  e con la distribuzione di probabilità  $p$  e la funzione  $f$  a valori reali. Come per la (3.20) si ha:

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(x_j) p(x_j) = \langle f \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \approx \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M f(x_n).$$

rificate, possiamo tranquillamente fare affidamento alla stima  $F_M$ , sapendo a priori che ripetendo il calcolo di  $F_M$  il risultato starà entro l'intervallo di confidenza  $[F_M - \epsilon_M, F_M + \epsilon_M]$  con probabilità del 68%. Una stima dello stesso intervallo di confidenza è fornita dalla radice della deviazione quadratica media

$$\delta_M = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^M [f(x_n) - F_M]^2}{M(M-1)}}.$$

Il fatto che l'errore sia controllabile è notevole<sup>20</sup>; infatti, se ad esempio nel calcolo della somma della nota 19, procedessimo semplicemente eliminando alcuni termini, non avremmo la minima idea di quanto il nostro risultato si discosti dal valore della somma; anzi potremmo essere così sfortunati da scegliere di non sommare i termini più importanti, cosicchè otterremmo un risultato completamente sbagliato! Questo invece, come spiegato, in linea di principio non accade usando il metodo Monte Carlo.

Il termine “in linea di principio” si riferisce alla necessità di generare  $N$  numeri realmente casuali (ovvero distribuiti secondo la  $p(x)$ ). Questo risultato può essere conseguito con diverse tecniche: metodo della cumulativa, metodo Metropolis, ecc. . .<sup>21</sup> Per le simulazioni dei prossimi due sottoparagrafi è stato utilizzato il metodo della cumulativa.

---

<sup>20</sup>Questo non è l'unico pregio del metodo Monte Carlo. Nel calcolo approssimato di un integrale in dimensione  $d$ , a precisione fissata, cioè fissato il valore di  $\delta_M$ , il numero dei punti richiesti dal metodo Monte Carlo non dipende da  $d$ , mentre cresce esponenzialmente con  $d$  utilizzando le usuali tecniche di integrazione.

<sup>21</sup>La letteratura su questo argomento è vastissima. A titolo di esempio, si veda [28] per il metodo della cumulativa e [31] per una discussione sull'algoritmo di Metropolis con interessanti riferimenti all'ottica quantistica.

Sostanzialmente la simulazione numerica consiste nel fissare una  $\rho_s$ , che viene ricostruita mediante la (3.14) calcolata col metodo Monte Carlo così come verrebbe ottenuta sperimentalmente (è chiaro che in questo caso le  $p(\vec{n}, m)$  vengono calcolate teoricamente). Dai risultati dei prossimi sottoparagrafi, sarà presto evidente che, grazie al metodo Monte Carlo, un numero relativamente piccolo di misure è sufficiente a fornire elementi di matrice di  $\rho_s$  notevolmente precisi, rispondendo così al dubbio sollevato al termine del paragrafo 3.4.

### 3.5.1 Stato coerente di spin

La prima scelta della matrice densità è quella del caso puro di uno stato coerente di spin. Esso è definito come

$$|\alpha\rangle \equiv e^{\alpha S_+ - \alpha^* S_-} | -S \rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (3.21)$$

con  $S_{\pm} \equiv S_x \pm iS_y$ , per cui la matrice densità è  $\rho_s^{coer} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ . Si noti la somiglianza con lo stato coerente ottico, ovvero  $|\alpha\rangle_{opt} \equiv e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} |0\rangle$  ( $|0\rangle$  è lo stato di vuoto del modo ottico considerato). In realtà, l'analogia tra i due stati coerenti è molto più forte di quanto risulti dalle sole definizioni ed è possibile una definizione di stati coerenti per una vasta classe di gruppi. Non essendo essenziale insistere su questo punto ci si limiterà a segnalare gli articoli [32], **ce ne sono altri** nei quali è possibile trovare una discussione più approfondita.

Come spiegato alla fine del paragrafo (3.5), calcolando  $p(\vec{n}, m)$  a partire

dalla (3.21) e sostituendo in (3.14)<sup>22</sup> si ottiene la rappresentazione matriciale della  $\rho_s^{coer}$ . Tale risultato è rappresentato graficamente in Fig.3.2. È anche possibile, come già detto, valutare gli errori associati al metodo Monte Carlo: questi sono mostrati in Fig.3.3.

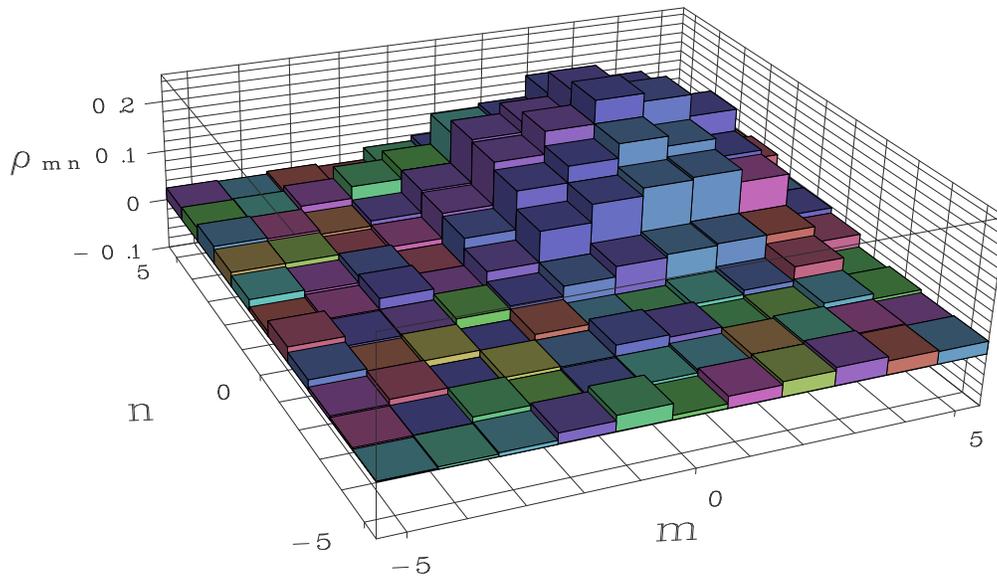


Figura 3.2: Matrice densità per uno stato coerente di spin  $\rho_s^{coer}$ . I parametri per lo stato sono  $\alpha = 1$  e  $S = 5$ . L'altezza dei parallelepipedi rappresenta il modulo dell'elemento di matrice, il colore la fase. La simulazione è stata eseguita utilizzando 3000 coppie di diversi valori di  $(\vartheta, \varphi)$ .

Nella Fig. 3.2 è stato necessario fissare un particolare valore di  $\alpha$  (oltre

---

<sup>22</sup>Il termine “sostituendo” non inganni: l'integrale (3.14) viene valutato con il metodo Monte Carlo e non calcolato analiticamente.

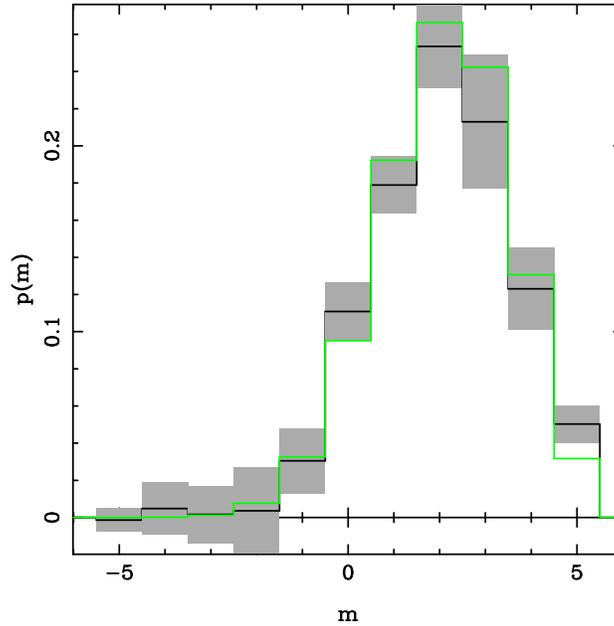


Figura 3.3: Elementi diagonali della matrice della Fig.3.2. Le barre di errore sono ottenute dividendo le misure in 10 blocchi statistici. La linea verde indica il valore teorico. Aumentando il numero di misure la linea nera (valore simulato) tende a sovrapporsi con quella verde.

che di  $S$ , che tuttavia dipende dalla particella in esame e non da una scelta arbitraria). È interessante conoscere la forma della matrice che rappresenta lo stato coerente di spin al variare di  $\alpha$ . A tal fine, nella Fig.3.6 (alla fine del capitolo), viene mostrata la matrice  $\rho_s^{coer}$  per  $S = 5$  al variare di  $\alpha$  tra 0 e  $(2\pi - \frac{2\pi}{20})$  con step regolari di  $\frac{2\pi}{20}$ <sup>23</sup>. Quanto si osserva è un' "onda" che si

<sup>23</sup>Il caso della figura 3.6 non è il più generale poichè si fanno assumere ad  $\alpha$  unicamente valori reali, tuttavia, le caratteristiche della matrice sono analoghe anche per  $\alpha$  complesso. Inoltre, si vuole ricordare che non stati indicati gli assi poichè interessa solo l'andamento qualitativo.

propaga a partire da uno spigolo per riflettersi sullo spigolo opposto e tornare indietro con fasi diverse (infatti i colori non sono uguali dopo la riflessione). Una volta ritornata allo spigolo di partenza, viene di nuovo riflessa dando luogo ad altre venti immagini identiche a quelle della figura. In altri termini, dalla ventesima immagine si ritorna alla prima, poi alla seconda, e così via<sup>24</sup>. Se si rappresentasse la matrice densità di un sistema ottico in uno stato coerente puro, il risultato sarebbe simile. Infatti, si otterrebbe inizialmente un'onda stretta ed alta che progressivamente si abbassa e si allarga allontanandosi. Tuttavia, questo movimento continua indefinitamente, poichè lo spazio di Hilbert ha dimensione infinita e non vi sono quindi spigoli contro i quali riflettersi.

### 3.5.2 Stato termico di spin

Come secondo caso, si considera uno stato miscela così definito:

$$\rho_s^{term} \equiv \frac{e^{-\epsilon S_z}}{\text{Tr}[e^{-\epsilon S_z}]}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Lo stato (3.22) verrà detto stato termico di spin. Fisicamente  $\rho_s^{term}$  è la matrice densità ridotta di spin di un gas di particelle non interagenti all'equilibrio termico con una riserva alla temperatura  $T$  ed in presenza di un

---

<sup>24</sup>Questo comportamento era banalmente prevedibile, poichè per  $\alpha$  reale

$$\begin{aligned} |\alpha + 2\pi\rangle &\equiv e^{(\alpha+2\pi)S_+ - (\alpha+2\pi)^*S_-} | - S \rangle = e^{\alpha S_+ - \alpha^* S_- + 2\pi(S_+ - S_-)} | - S \rangle = \\ &= e^{\alpha S_+ - \alpha^* S_-} e^{2\pi(S_+ - S_-)} | - S \rangle = e^{\alpha S_+ - \alpha^* S_-} e^{4\pi i S_y} | - S \rangle = e^{\alpha S_+ - \alpha^* S_-} | - S \rangle = |\alpha\rangle. \end{aligned}$$

campo magnetico di intensità  $B$  parallelo all'asse  $z$ . Con questa interpretazione  $\epsilon = \gamma \hbar B_z / (K_B T)$ , dove  $K_B$  è la costante di Boltzmann e  $\gamma$  è il rapporto giromagnetico. Come nel caso dello stato coerente, scegliendo un valore per  $\epsilon$  e per  $S$ , è possibile rappresentare graficamente la matrice dello stato termico di spin e gli errori sugli elementi diagonali (che in questo caso sono gli unici diversi da zero). I risultati sono contenuti rispettivamente nelle figure 3.4 e 3.5.

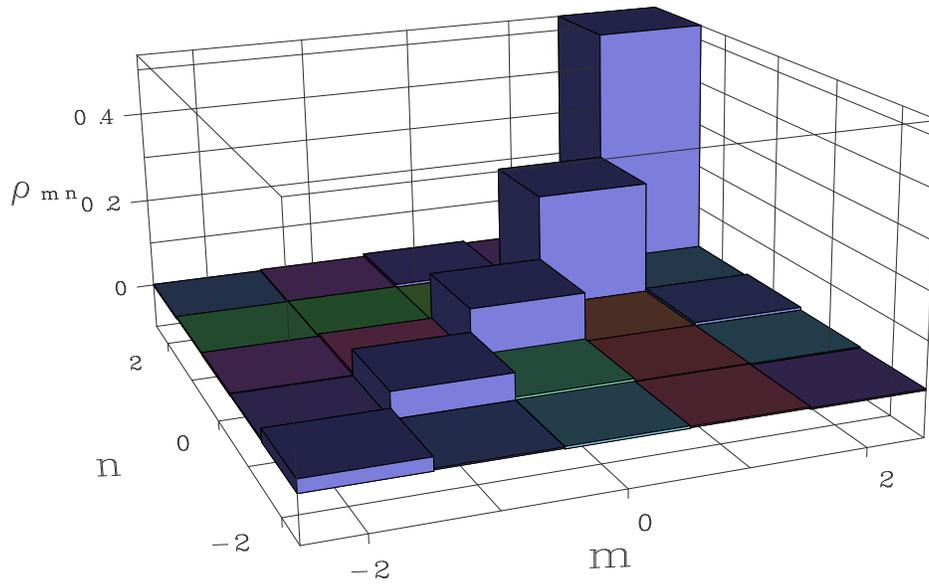


Figura 3.4: Matrice densità per uno stato termico di spin  $\rho_s^{term}$ . I parametri sono  $\epsilon = \frac{3}{4}$  e  $S = 2$ . L'interpretazione della figura ed il metodo con cui è stata ottenuta sono identici a quelli della figura 3.2. In questo caso però, è stato aumentato il numero delle misure simulate, portandolo da 3000 a 60000.

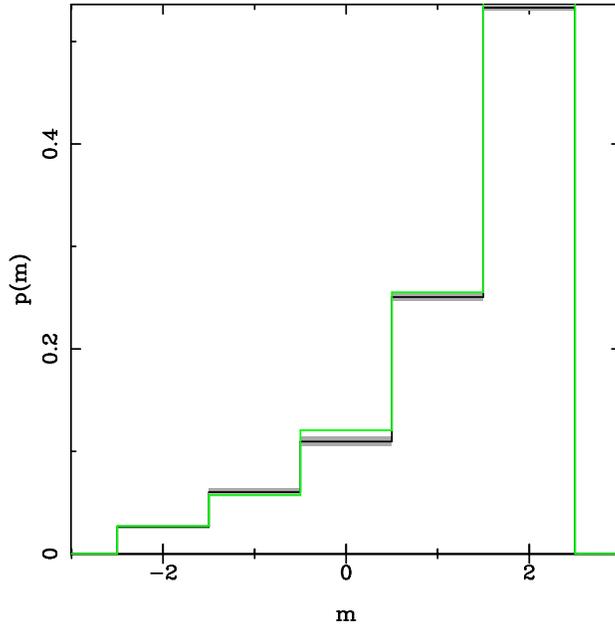


Figura 3.5: Elementi diagonali della matrice della Fig.3.4. Anche in questo caso le barre di errore sono ottenute dividendo le misure in 10 blocchi statistici. Grazie al maggior numero di misure rispetto al caso della Fig.3.3, si hanno barre d'errore più piccole ed una maggiore sovrapposizione tra la linea verde (valore teorico) e quella nera (valore simulato).

In figura 3.7 invece, similmente al precedente sottoparagrafo, viene visualizzata una successione di stati termici al variare di  $\epsilon$  tra 0 e  $10 - \frac{1}{2}$  con uno step di  $\frac{1}{2}$ . Quanto si osserva in figura 3.7 a partire da  $\epsilon = 0$ , caso in cui  $\rho_s^{term}$  è proporzionale all'operatore identità, è l'allineamento con andamento esponenziale delle altezze dei parallelepipedi della diagonale. Nel caso limite di  $\epsilon \rightarrow \infty$  si otterrebbe l'azzeramento esatto di tutti gli elementi di matrice ad eccezione di uno collocato ad un estremo. La spiegazione fisica è molto

semplice: aumentando il rapporto tra campo magnetico e temperatura, l'effetto ordinante del campo predomina, allineando così gli spin nella propria direzione (in questo caso  $z$ ), fino a raggiungere la saturazione per  $\epsilon \rightarrow \infty$ .

Il caso dello stato termico di spin si presta anche ad un'altra interessante osservazione. Invece della (3.22), si consideri una definizione leggermente più generale di  $\rho_s^{term}$ , ovvero:

$$\rho_s^{term} \equiv \frac{e^{-\beta H_s}}{\text{Tr}[e^{-\beta H_s}]}, \quad (3.23)$$

dove  $\beta = \frac{1}{K_B T}$  e  $H_s$  rappresenta l'hamiltoniana nello spazio di spin. Come precedentemente, tale matrice densità descrive un sistema di particelle non interagenti con hamiltoniana di particella singola  $H_s$  (nello spazio di spin) all'equilibrio termico alla temperatura  $T$ . Dato un siffatto sistema, prelevando alcune particelle e sottoponendole all'apparato di misura della figura 3.1, è possibile determinare  $\rho_s^{term}$ <sup>25</sup>. Invertendo la (3.23) si può esprimere  $H_s$  in funzione di  $\rho_s^{term}$ , ossia:

$$H_s = -\frac{\ln(\rho_s^{term})}{\beta} - \frac{\ln(\text{Tr}[e^{-\beta H_s}])}{\beta}, \quad (3.24)$$

per cui la misura della matrice densità permette la determinazione della forma analitica della hamiltoniana di particella singola<sup>26</sup>. Se supponessimo

---

<sup>25</sup>Come indicato nell'esperimento simulato di questo sottoparagrafo, 60000 misure è un numero già sufficientemente alto da permettere una elevata precisione. Supponendo che il sistema in esame sia costituito da un numero di componenti dell'ordine di  $10^{23}$ , è ragionevole supporre che la sottrazione di 60000 particelle da questo comporti un'alterazione trascurabile dello stato di equilibrio.

<sup>26</sup>La presenza nel secondo addendo della (3.24) di una costante dipendente da  $H_s$  è semplicemente dovuta al fatto che sistemi le cui hamiltoniane differiscono per una costante additiva posseggono la stessa matrice densità canonica.

più in generale che le particelle possano interagire, allora con il medesimo procedimento si ricaverebbe la forma analitica della hamiltoniana di campo medio.

### 3.6 Osservabili macroscopiche

Il capitolo si conclude con un metodo per determinare il valore assunto da una grandezza macroscopica di un sistema statistico di particelle non interagenti, anche per quei casi in cui non è nota una procedura diretta di misura<sup>27</sup>.

In generale, per particelle interagenti e non, il valore macroscopico misurato dell'osservabile  $O_{macr}$  è dato da<sup>28</sup>:

$$O_{macr} = \langle \hat{O}_{tot} \rangle = \text{Tr}[\hat{O}_{tot} \rho_{tot}], \quad (3.25)$$

con  $\rho_{tot}$  matrice densità di tutto il sistema di particelle. Supponendo di avere un sistema di  $N$  particelle distinguibili, non interagenti ed all'equilibrio termico e che inoltre  $\hat{O}_{tot} = \sum_i^N \hat{O}_i$ , è semplice dimostrare che

$$O_{macr} = \langle \hat{O}_{tot} \rangle = N \text{Tr}_i[\hat{O}_i \rho_i], \quad (3.26)$$

dove  $\rho_i$  è la matrice densità ridotta del sistema  $i$ -esimo (è chiaro che tale sistema  $i$ -esimo può essere scelto a piacere, vista l'indipendenza di  $\text{Tr}_i[\hat{O}_i \rho_i]$

---

<sup>27</sup>Anche se non viene più ripetuto esplicitamente, in questo capitolo ci si riferisce sempre al solo spazio di spin, per cui in questo caso la grandezza macroscopica deve essere riconducibile a osservabili microscopiche di spin. Le variabili macroscopiche con analogo microscopico non sono le uniche possibili (ad esempio l'entropia non rientra in questa categoria), tuttavia, nell'analisi di questo paragrafo, ci si limiterà a queste.

<sup>28</sup>Una parziale giustificazione dell'equazione (3.25), che deve essere intesa come un postulato, può essere fornita dall'ipotesi ergodica quantistica [29, 30].

dall'indice  $i$ ). Del resto,  $\rho_i$  è quanto si misura secondo il metodo proposto nei precedenti paragrafi, per cui grazie alla (3.26) è possibile ottenere il valore  $O_{macr}$  (in realtà, spesso, quanto interessa è  $\frac{O_{macr}}{N}$ , perciò non serve conoscere il valore di  $N$ ). Tuttavia, non è necessario calcolare la  $\rho$  secondo la (3.2) per poi valutare la traccia sullo spazio di particella singola, bensì si può procedere direttamente mediante l'uguaglianza<sup>29</sup>

$$\text{Tr}_i[\hat{O}_i \rho_i] = (2S + 1) \int d\mu(g) \text{Tr}[\rho_i \mathcal{R}^\dagger(g)] \text{Tr}[\hat{O}_i \mathcal{R}(g)], \quad (3.27)$$

che fornisce, con passaggi simili a quelli del paragrafo 3.3, la seguente formula:

$$\text{Tr}_i[\hat{O}_i \rho_i] = \int \frac{d\Omega_{\vec{n}}}{4\pi} \sum_{m=-S}^S p(\vec{n}, m) \mathcal{O}_S(\vec{n}, m), \quad (3.28)$$

dove  $\mathcal{O}_S(\vec{n}, m)$  è definito come

$$\mathcal{O}_S(\vec{n}, m) = (2S + 1) \left[ o_m^{\vec{n}} - \frac{1}{2} [o_{m+1}^{\vec{n}} + o_{m-1}^{\vec{n}}] \right],$$

con  $o_m^{\vec{n}} \equiv \langle \vec{n}, m | \hat{O}_i | \vec{n}, m \rangle$ . Il significato e l'utilizzo della (3.28) sono i soliti, ovvero con l'apparato del paragrafo 3.4 si ottengono sperimentalmente le probabilità  $p(\vec{n}, m)$ , mentre analiticamente si calcola  $\mathcal{O}_S(\vec{n}, m)$ <sup>30</sup>; mettendo i due risultati nella (3.28) si ricava  $\text{Tr}_i[\hat{O}_i \rho_i]$ , che è quanto si cercava. Non sono solo ragioni di comodità che suggeriscono di calcolare i valori medi direttamente con la (3.28) invece che con la (3.2). Infatti, la determinazione

<sup>29</sup>Essendo la dimostrazione della (3.27) banale, è sufficiente una nota: In base al teorema 3.1.4 si ha  $\hat{\rho}_i = (2S+1) \int d\mu(g) \text{Tr}[\hat{\rho}_i \mathcal{R}^\dagger(g)] \mathcal{R}(g)$  per cui moltiplicando per  $\hat{O}_i$  e tracciando si ricava (3.27).

<sup>30</sup>Il calcolo di  $\mathcal{O}_S(\vec{n}, m)$  si riduce semplicemente a quello di  $\langle \vec{n}, m | \hat{O}_i | \vec{n}, m \rangle$ , in accordo alle definizioni date.

della  $\rho_s$  con il metodo Monte Carlo comporta la comparsa di errori statistici, che verrebbero propagati nel calcolo della traccia della (3.2). Per questo motivo, se si volesse conoscere soltanto un valor medio o una probabilità<sup>31</sup> e non si fosse interessati a tutte le informazioni contenute nella matrice densità, conviene sempre utilizzare la (3.28).

---

<sup>31</sup>Una probabilità si calcola come valor medio di un proiettore, quindi ancora tramite la (3.28).

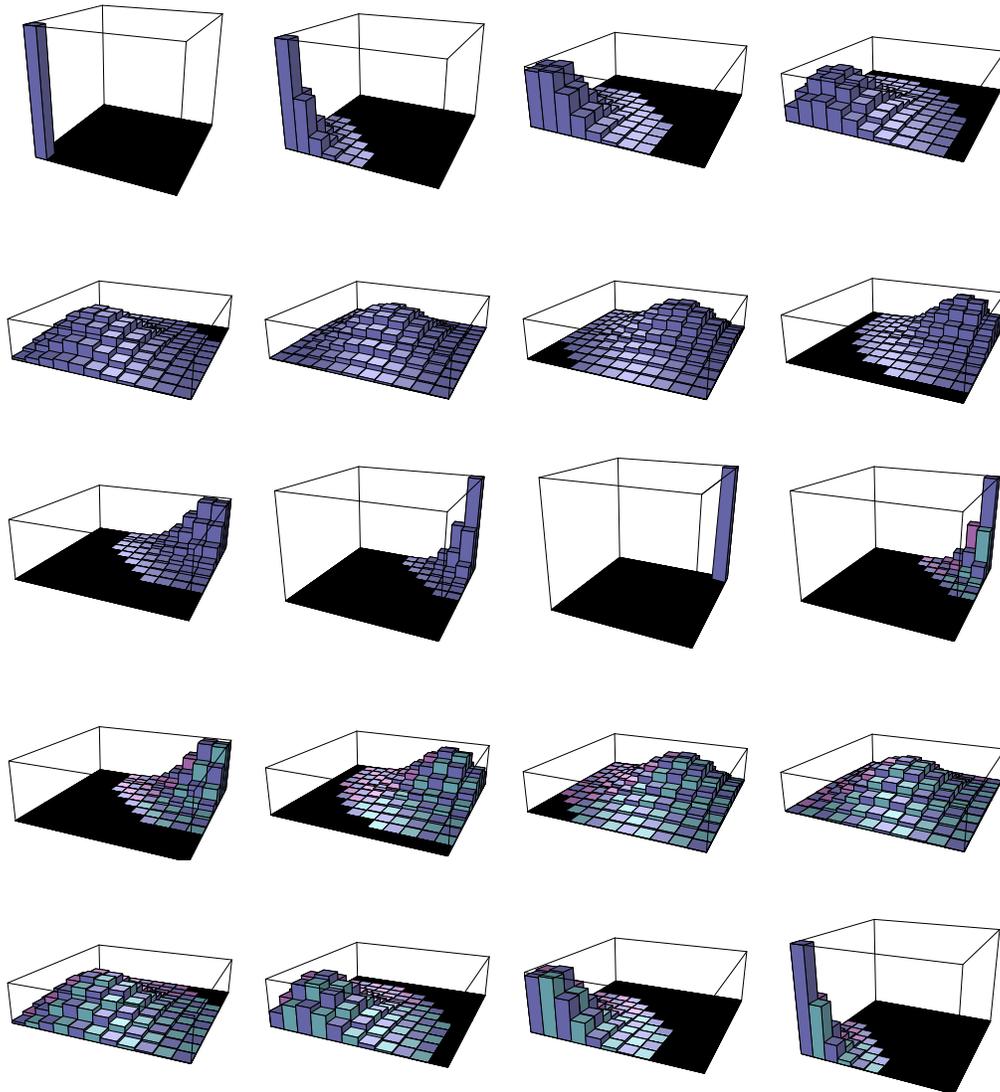


Figura 3.6: Stati coerenti di spin al variare del parametro  $\alpha$ , che cresce da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso.

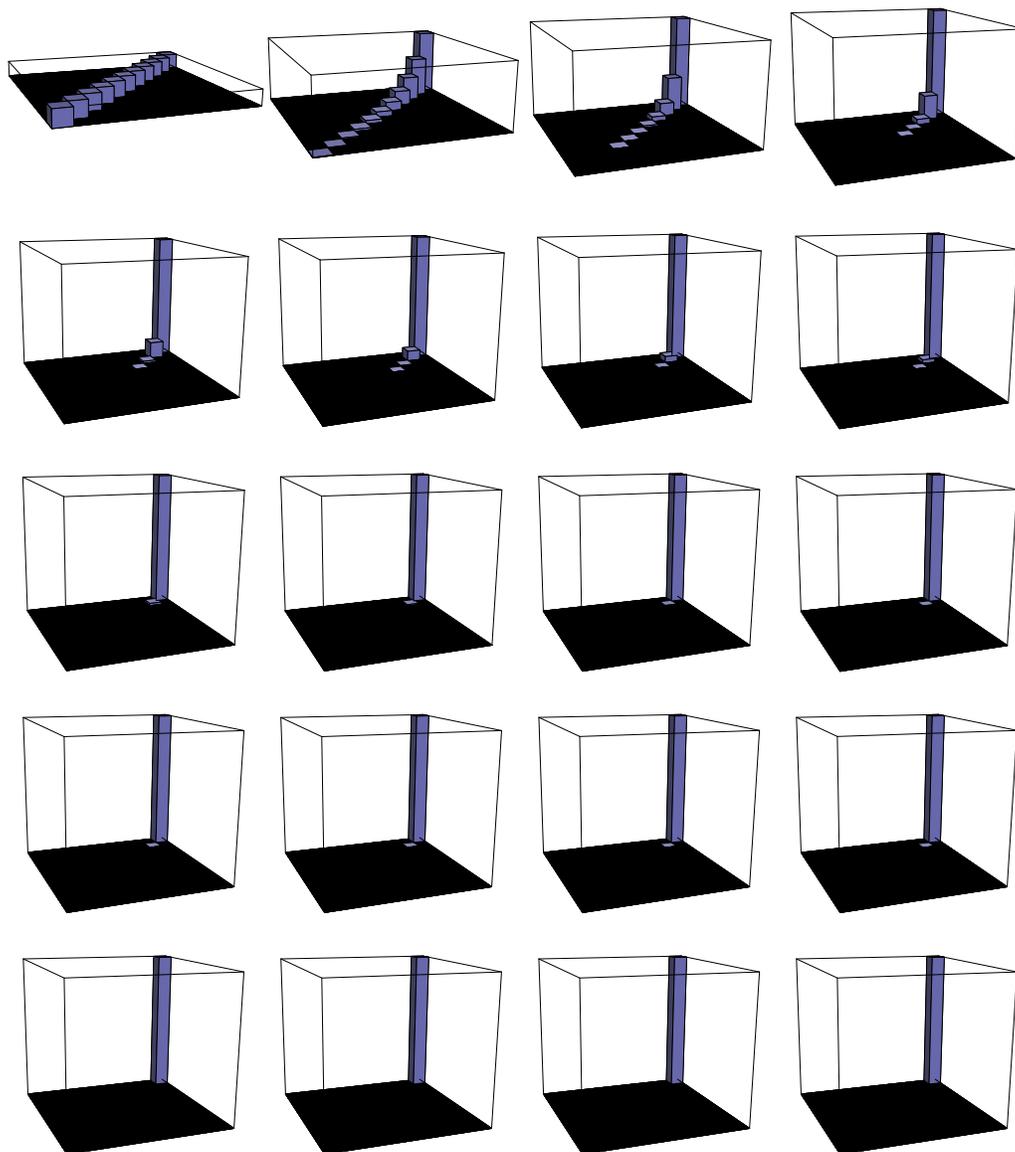


Figura 3.7: Stati termici di spin al variare di  $\epsilon$ .

## Capitolo 4

# Tomografia di spin per sistemi compositi

Dopo avere risolto il problema della determinazione dello stato di spin di un sistema composto da una sola particella, è naturale cercare di estendere i metodi sviluppati al caso più generale di un sistema a più componenti. Da un punto di vista matematico tale estensione è immediata, tuttavia questa prevederebbe la necessità di operare misure sui singoli costituenti, per cui, ad eccezione di qualche caso particolare, si rivela sostanzialmente inutilizzabile. Questa osservazione contiene già il nucleo del problema fondamentale della tomografia di spin dei sistemi compositi. Più precisamente, la difficoltà aggiuntiva rispetto al caso dei sistemi elementari composti da una solo spin è quella di sviluppare una tecnica che permetta di ottenere lo stato dei componenti a partire da sole misure fatte sul sistema nel suo complesso. La possibilità di guardare dentro un oggetto senza “romperlo” potrebbe apparire poco ragionevole, ed è per questo motivo che il presente capitolo si

riferirà al caso particolare di sistemi di particelle identiche, potendo infatti fare ricorso a priori ad alcune proprietà cui devono soddisfare i componenti in virtù dell'indistinguibilità. Si vuole infine fare notare che il termine particelle identiche non deve essere interpretato in senso stretto, bensì è sufficiente che le particelle abbiano lo stesso spin, come sarà precisamente giustificato più avanti. Di conseguenza, l'analisi dei soli sistemi di particelle identiche è già estremamente generale.

## 4.1 Metodo diretto

Secondo la discussione del sottoparagrafo 2.4.1 e per il teorema 2.2.3, gli operatori della rappresentazione irriducibile di  $[SU(2)]^N$ <sup>1</sup>, a meno di equivalenze, hanno la forma  $\bigotimes_{k=1}^N \mathcal{R}(g_k)$ , dove  $g_k \in SU(2)$ . Inoltre, la misura invariante  $d\mu^N$  di  $[SU(2)]^N$  risulta dal prodotto di quelle di  $SU(2)$ :

$$d\mu^N = \prod_{k=1}^N d\mu(g_k), \quad \text{con} \quad d\mu(g_k) = \frac{1}{4\pi^2} \sin^2 \frac{\psi_k}{2} \sin \vartheta_k \, d\psi_k \, d\vartheta_k \, d\varphi_k. \quad (4.1)$$

Le proprietà di  $SU(2)$  necessarie per la dimostrazione del teorema (3.1.4) sono possedute anche da  $[SU(2)]^N$ , allora indicando con  $\rho_S$  la matrice densità ridotta di spin di un sistema di  $N$  particelle con spin  $s_k$ ,  $i = k, \dots, N$ , si avrà<sup>2</sup>

$$\rho_S = \int \prod_{k=1}^N (2s_k + 1) \, d\mu(g_k) \, \text{Tr} \left[ \rho \bigotimes_{k'=1}^N \mathcal{R}^\dagger(g_{k'}) \bigotimes_{k''=1}^N \mathcal{R}(g_{k''}) \right],$$

---

<sup>1</sup>Con  $[SU(2)]^N$  si indica il prodotto tensore di  $SU(2)$  con se stesso  $N$  volte.

<sup>2</sup>Chi non si fidasse veda il capitolo 5.

da cui, come nel capitolo 3, risulterà

$$\int \prod_{k=1}^N (2s_k + 1) d\mu(\psi_k, \vartheta_k, \varphi_k) \text{Tr} [\rho e^{i(\sum_{k'} \psi_{k'} \vec{s}_{k'} \cdot \vec{n}_{k'})}] e^{-i(\sum_{k''} \psi_{k''} \vec{s}_{k''} \cdot \vec{n}_{k''})},$$

con  $d\mu(\psi_k, \vartheta_k, \varphi_k)$  come nella (4.1). Lo sviluppo della traccia farà apparire le probabilità  $p(\vec{n}_1, m_1; \vec{n}_2, m_2; \dots; \vec{n}_N, m_N)$ , corrispondenti a dovere eseguire misure di momenti angolari di spin in direzioni diverse per i singoli componenti. Evidentemente questo non è possibile.

Il metodo diretto per risolvere il problema consiste nel cercare di sviluppare l'espressione  $\text{Tr} [\rho e^{i(\sum_{k'} \psi_{k'} \vec{s}_{k'} \cdot \vec{n}_{k'})}]$ , che dà luogo alle  $p(\vec{n}_1, m_1; \dots; \vec{n}_N, m_N)$ , nella forma  $\text{Tr} [\rho f(\vec{S})]$ , con  $\vec{S} = \sum_{k=1}^N \vec{s}_k$ . Ciò permetterebbe di misurare solo osservabili globali di spin, cosa che, in linea di principio, può essere fatta. L'esame del caso più semplice possibile, ovvero quello di due spin 1/2 identici<sup>3</sup>, porta<sup>4</sup> ad una funzione  $f$  dipendente non solo da  $\vec{S}$  ma anche dal tensore  $\vec{S}\vec{S}$ , comportando la necessità di misurare gli operatori  $\vec{S} \cdot \vec{n}$  e  $\vec{n}_1 \vec{n}_2 + \vec{n}_2 \vec{n}_1 : \vec{S}\vec{S}$ . La complicatezza associata ad un caso così semplice ci spingerà allora a cercare la soluzione in altra forma<sup>5</sup>.

---

<sup>3</sup>La condizione che gli spin siano identici è utile per il fatto che la matrice densità è diagonale a blocchi in una rappresentazione sugli autostati di  $S^2$  (si veda la (4.5)).

<sup>4</sup>Visto che il metodo diretto non verrà utilizzato, i calcoli, peraltro molto lunghi, non verranno riportati. Verrà quindi fornito soltanto un accenno a come procedere: Sviluppando l'esponenziale che compare nella traccia in serie di potenze e sfruttando l'idempotenza degli operatori di spin, è possibile mediante il teorema di Wigner-Eckart [16], ricondurre gli elementi di matrice di tutte le potenze di  $\psi_1 \vec{s}_1 \cdot \vec{n}_1 + \psi_2 \vec{s}_2 \cdot \vec{n}_2$  a tensori di  $\vec{S}$  del primo e del secondo ordine.

<sup>5</sup>Per  $N$  spin 1/2 identici sono prevedibili addirittura tensori di ordine  $N$ .

## 4.2 Un caso particolare: Due spin 1/2

Per illustrare il metodo che si vuole seguire in generale, è utile cominciare col considerare il caso di due soli spin 1/2. Infatti, un sistema costituito da due particelle identiche presenta già la peculiarità di avere la matrice densità di spin diagonale a blocchi<sup>6</sup>, nonostante sia esente dalle complicazioni tipiche dei casi con numero di particelle maggiore di due<sup>7</sup>. In altri termini, mediante un sistema a due spin 1/2 è possibile illustrare gli aspetti salienti di quanto potremmo chiamare tomografia di spin a blocchi, pur mantendo il discorso semplice. Perciò, in questo paragrafo, l'approccio al problema della tomografia di due spin sarà diretto, cioè, non si farà riferimento esplicito agli accorgimenti necessari per generalizzare il procedimento al caso di  $N$  particelle. Il problema generale degli  $N$  spin 1/2 verrà affrontato<sup>8</sup> nell'ultimo paragrafo di questo capitolo.

La più generale matrice densità di un sistema di due particelle con spin 1/2 è la seguente:

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|, \quad (4.2)$$

dove ogni  $\Psi_i$ , in virtù della completa antisimmetria della funzione d'onda di

---

<sup>6</sup>È principalmente questa caratteristica che permette la soluzione del problema.

<sup>7</sup>Queste complicazioni, come si capirà in seguito, sono dovute alla comparsa delle simmetrie parziali nella classificazione degli stati.

<sup>8</sup>Verrà affrontato, ma purtroppo non risolto !

un sistema di fermioni, ha la seguente forma<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned}
|\Psi_i\rangle &= |s_i(1, 2)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) + |a_{i,0}(1, 2)\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) + \\
&+ |a_{i,1}(1, 2)\rangle |\uparrow\uparrow\rangle + |a_{i,-1}(1, 2)\rangle |\downarrow\downarrow\rangle = \\
&= |s_i(1, 2)\rangle |S = 0, M = 0\rangle + |a_{i,0}(1, 2)\rangle |S = 1, M = 0\rangle + \\
&+ |a_{i,1}(1, 2)\rangle |S = 1, M = 1\rangle + |a_{i,-1}(1, 2)\rangle |S = 1, M = -1\rangle. \quad (4.3)
\end{aligned}$$

I vettori  $|s_i\rangle$  e  $|a_i\rangle$  appartengono alla parte configurazionale dello spazio di Hilbert; il primo è simmetrico per scambio delle particelle, i secondi antisimmetrici<sup>10</sup>. La matrice densità ridotta di spin è definita come  $\rho_S \equiv \text{Tr}_P[\rho]$ , dove  $\text{Tr}_P$  rappresenta la traccia parziale sul solo spazio delle configurazioni, per cui, indicando con  $|\vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle$  gli autostati di posizione delle due particelle, si ha:

$$\begin{aligned}
\rho_S &= \sum_i p_i \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | \Psi_i \rangle \langle \Psi_i | \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle = \\
&= \sum_i p_i \left[ \langle s_i | s_i \rangle |0, 0\rangle \langle 0, 0| + \sum_{M, M'} \langle a_{i, M'} | a_{i, M} \rangle |1, M\rangle \langle 1, M'| + \right. \\
&\left. + \sum_M \langle s_i | a_{i, M} \rangle |1, M\rangle \langle 0, 0| + \langle a_{i, M} | s_i \rangle |0, 0\rangle \langle 1, M| \right] =
\end{aligned}$$

---

<sup>9</sup>I vettori  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  indicano rispettivamente gli autostati di  $s_z$  con autovalori  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ . Un vettore del tipo  $|\uparrow\downarrow\rangle$  rappresenta semplicemente il prodotto tensore tra  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$ . Infine,  $|S, M\rangle$  ha il significato di autostato di  $S^2$  e  $S_z$  con autovalori  $S(S+1)$  e  $M$ , dove  $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ . D'ora in avanti, a differenza della (4.3), si userà la notazione più semplice  $|\alpha, \beta\rangle$  al posto di  $|S = \alpha, M = \beta\rangle$ .

<sup>10</sup>È proprietà generale di qualsiasi spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , dato dal prodotto tensore di due spazi di Hilbert isomorfi  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ , di potere essere decomposto in due sottospazi ortogonali, sottesi rispettivamente dai vettori simmetrici e dai vettori antisimmetrici per scambio degli indici che definiscono l'appartenenza a  $\mathcal{H}_1$  o  $\mathcal{H}_2$ . L'ortogonalità tra i vettori simmetrici e quelli antisimmetrici è utile ai fini dell'ottenimento della (4.4).

$$= \sum_i p_i \left[ \langle s_i | s_i \rangle |0, 0\rangle \langle 0, 0| + \sum_{M, M'} \langle a_{i, M'} | a_{i, M} \rangle |1, M\rangle \langle 1, M'| \right]. \quad (4.4)$$

L'ultima uguaglianza è garantita dalla ortogonalità cui si faceva riferimento nella nota 10. La (4.4) dimostra che nella rappresentazione dei vettori  $\{|S, M\rangle\}$  la matrice  $\rho_S$  è diagonale a blocchi, avrà cioè il seguente aspetto<sup>11</sup>:

$$\rho_S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & 0 \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

con  $\sigma_{jk} = \sum_i p_i \langle a_{i, 2-k} | a_{i, 2-j} \rangle$ ,  $\alpha = \sum_i p_i \langle s_i | s_i \rangle$ . Le costanti  $\sigma_{jj}$  hanno il significato di probabilità che una misura congiunta di  $S^2, S_z$  dia autovalori  $1, 2 - j$ , mentre la costante  $\alpha$  rappresenta la probabilità che  $S^2$  sia nullo, o se si preferisce che  $S^2, \vec{S} \cdot \vec{n}$  siano entrambi nulli, per qualsiasi  $\vec{n}$ <sup>12</sup>. Più sinteticamente, si potrebbe scrivere la (4.5) come  $\rho_S = \sigma \oplus \alpha$ .

A questo punto, la riduzione a blocchi della  $\rho_S$  suggerisce la possibilità di applicare la (3.1) e la conseguente (3.2) separatamente ad ogni blocco. Per procedere in tale maniera, tuttavia, bisogna trovare un set di operatori rispetto ai quali il singolo sottospazio corrispondente ad un blocco sia invariante ed irriducibile, inoltre, i suddetti operatori devono avere proprietà di gruppo, necessarie alla dimostrazione della (3.1). In realtà, il problema si

---

<sup>11</sup>Si utilizza lo stesso simbolo  $\rho_S$  per indicare l'operatore e la matrice densità ridotta.

<sup>12</sup>Le affermazioni circa il significato delle costanti possono essere verificate direttamente sviluppando il secondo membro di  $p(S^2 = S(S+1), S_z = M) = \text{Tr}_S[\rho_S |S, M\rangle \langle S, M|]$ , dove  $\text{Tr}_S$  indica la traccia parziale sullo spazio di spin. È banale, inoltre, dimostrare che  $p(S^2=0) = p(S^2=0, \vec{S} \cdot \vec{n}=0)$ , per ogni  $\vec{n}$ .

pone solo per il sottospazio sotteso da  $\{|S = 1, M\rangle\}$  (che d'ora in poi verrà indicato con  $\mathcal{H}_1$ ), poichè per determinare  $\alpha$  non evidentemente è necessario il metodo tomografico. Si considerino allora gli operatori:

$$\{e^{-i\psi(\vec{S}\cdot\vec{n})_1}\}, \quad (4.6)$$

dove il pedice 1 sta ad indicare che gli operatori (4.6) differiscono da  $\{e^{-i\psi\vec{S}\cdot\vec{n}}\}$  in quanto il loro dominio è ristretto a  $\mathcal{H}_1$ . Al variare dei parametri  $\psi, \vec{n}$ , il set di operatori (4.6) costituisce una rappresentazione irriducibile di dimensione 3 del gruppo  $SU(2)$ , per cui è possibile applicare alla matrice  $\sigma$  l'analogo delle formule (3.1) e (3.2), ottenendo

$$\begin{aligned} \sigma &= 3 \int d\mu(\vec{n}, \psi) \text{Tr}_1[\sigma e^{-i\psi(\vec{S}\cdot\vec{n})_1}] e^{i\psi(\vec{S}\cdot\vec{n})_1} = \\ &= \int \frac{d\vec{n}}{4\pi} \sum_{M=-1}^1 p(S^2 = 2, \vec{S}\cdot\vec{n} = M) K_1(M - \vec{S}\cdot\vec{n}), \end{aligned}$$

con  $d\mu(\vec{n}, \psi)$  come nella (2.15) e con  $\text{Tr}_1$  che indica la traccia in  $\mathcal{H}_1$ . Infine, grazie alla decomposizione della  $\rho_S$ , si arriva alla formula

$$\rho_S = \int \frac{d\vec{n}}{4\pi} \sum_{M=-1}^1 p(S^2 = 2, \vec{S}\cdot\vec{n} = M) K_1(M - \vec{S}\cdot\vec{n}) \oplus p(S^2 = 0). \quad (4.7)$$

La (4.7) è la formula tomografica di due spin 1/2 identici, ovvero mediante la (4.7) è possibile determinare  $\rho_S$  con misure facilmente realizzabili; difatti, è solamente necessario ottenere le distribuzioni di probabilità  $p(S; \vec{n}, M)$ , corrispondenti agli operatori  $S^2, \vec{S}\cdot\vec{n}$ , per ogni  $\vec{n}$ . L'esperimento ideale, in grado di fornire i risultati richiesti, sarà l'oggetto dell'ultima parte di questo paragrafo.

L'apparato sperimentale, capace di fornire le probabilità  $p(S; \vec{n}, M)$  per ogni  $\vec{n}$ , è rappresentato in figura 4.1. Poichè il ruolo del Fizeau e del primo magnete con campo  $\vec{B}_1 = B_1 \vec{n}_\perp = B_1(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$  sono i medesimi del capitolo 3, si è preferito rappresentare entrambi semplicemente con un "rettangolino". Inoltre, si supporrà che si stia cercando di eseguire una misura di  $S^2, S_z$ , ricordando che, grazie al Fizeau ed al campo  $\vec{B}_1$ , si passa comodamente alla misura di  $S^2, \vec{S} \cdot \vec{n}$ <sup>13</sup>.

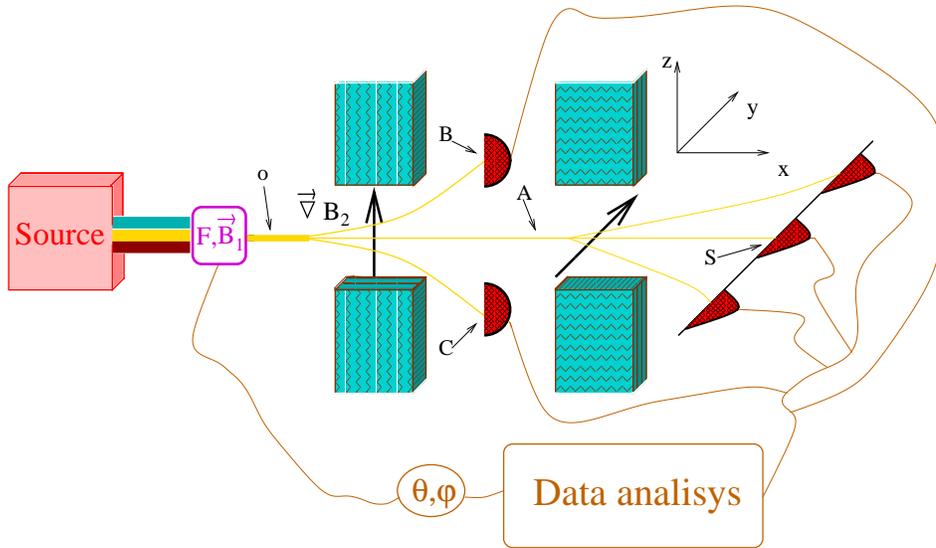


Figura 4.1: Apparato sperimentale per la tomografia di due spin 1/2.

Si supponga di avere un fascio di  $n$  sistemi composti da due particelle di

<sup>13</sup>Anche in questo caso la discussione è limitata alle sole particelle elettricamente neutre, per le ragioni già spiegate nel paragrafo 3.4.

spin  $1/2$ , non interagenti e nello stesso stato di spin<sup>14</sup>

$$\Psi_o = \gamma^s |0, 0\rangle + \gamma_{-1}^a |1, -1\rangle + \gamma_0^a |1, 0\rangle + \gamma_1^a |1, 1\rangle. \quad (4.8)$$

Il fascio attraversa un gradiente di campo magnetico  $\vec{B}_2$  diretto lungo l'asse  $z$ , il cui effetto è quello di aprire il fascio in tre parti a seconda del valore di  $S_z$ . Nella parte non deviata del fascio è contenuto sia il contributo di  $|0, 0\rangle$  che di  $|1, 0\rangle$ . Invece le particelle che arrivano in  $B$  sono in uno stato  $|1, 1\rangle$ , mentre quelle che arrivano in  $C$  sono in  $|1, -1\rangle$ . In questo modo contando le particelle in  $B$  e  $C$  è possibile dedurre le probabilità  $p(S = 1, M = 1)$  e  $p(S = 1, M = -1)$ , che non sono altro che  $|\gamma_1^a|^2$  e  $|\gamma_{-1}^a|^2$  rispettivamente<sup>15</sup>. In  $A$ , le particelle arrivano con probabilità

$$p_A = |\gamma^s|^2 + |\gamma_0^a|^2 \quad (4.9)$$

e si trovano in uno stato<sup>16</sup>

$$\Psi_A = \xi (\gamma^s |0, 0\rangle + \gamma_0^a |1, 0\rangle), \quad (4.10)$$

---

<sup>14</sup>La notazione  $|a, b\rangle$  indica  $|S = a, M = b\rangle$ . Si noti che lo stato di spin (4.8), è il più generale possibile. Il caso miscela può essere ottenuto da quello puro semplicemente ipotizzando che lo stato sia  $\Psi_{i_o}$  con probabilità  $p_i$ , dove  $\Psi_{i_o}$  è della forma (4.8) con coefficienti  $\gamma$  dipendenti dall'indice  $i$ .

<sup>15</sup>Ovviamente per passare dal numero di particelle contate alle probabilità bisogna conoscere il numero totale di particelle, ma questo si può ottenere sommando il numero di tutte le particelle arrivate ai rivelatori.

<sup>16</sup>È possibile dare una giustificazione estremamente precisa della (4.10), considerando l'evoluzione temporale del sistema (includendo anche la parte configurazionale) ed utilizzando il principio di Bayes quantistico.

dove  $\xi$  è un fattore di normalizzazione il cui modulo quadro vale<sup>17</sup>

$$|\xi|^2 = \frac{1}{|\gamma^s|^2 + |\gamma_0^a|^2} = \frac{1}{1 - (|\gamma_{-1}^a|^2 + |\gamma_1^a|^2)}. \quad (4.11)$$

Le particelle non deviate, che passano cioè per  $A$ , entrano poi in un secondo gradiente di campo magnetico, ma diretto in questo caso lungo l'asse  $y$ <sup>18</sup>. Per comprendere gli effetti sullo stato (4.10), conviene riscrivere quest'ultimo sviluppando  $|1, 0\rangle$  sugli autostati di  $S_y$ <sup>19</sup>:

$$\Psi_A = \xi [\gamma^s |0, 0\rangle_y + \gamma_0^a \alpha_{-1} |1, -1\rangle_y + \gamma_0^a \alpha_0 |1, 0\rangle_y + \gamma_0^a \alpha_1 |1, 1\rangle_y].$$

Vista la forma dello sviluppo, la probabilità che un sistema arrivi in  $S$  è

$$p_S = |\xi|^2 [|\gamma^s|^2 + |\gamma_0^a|^2 |\alpha_0|^2] = \frac{1}{p_A} [|\gamma^s|^2 + |\gamma_0^a|^2 |\alpha_0|^2]. \quad (4.12)$$

Potendo misurare sia  $p_A$  che  $p_S$ , è possibile risalire a  $|\gamma^s|^2$  e  $|\gamma_0^a|^2$  semplicemente invertendo le equazioni (4.9) e (4.12). Questa operazione produce il

---

<sup>17</sup>La normalizzazione della (4.8) e della (4.10) implicano rispettivamente  $|\gamma^s|^2 + |\gamma_{-1}^a|^2 + |\gamma_0^a|^2 + |\gamma_1^a|^2 = 1$  e  $|\xi|^2 (|\gamma^s|^2 + |\gamma_0^a|^2) = 1$ , che messe insieme danno la (4.11).

<sup>18</sup>Non è strettamente necessario scegliere il secondo gradiente lungo l'asse  $y$ , basta infatti che non abbia la stessa direzione del primo. Come si capirà tra breve, fissare un'altra direzione comporta solo una modifica dei valori dei coefficienti  $\alpha$ .

<sup>19</sup>Gli autostati di  $S^2, S_y$  verranno qui indicati come  $|S, M\rangle_y$ .

seguinte risultato<sup>20</sup>:

$$\begin{cases} |\gamma_0^a|^2 = \frac{p_A(1-p_G)}{1-|\alpha_0|^2} \\ |\gamma^s|^2 = \frac{p_A(p_G-|\alpha_0|^2)}{1-|\alpha_0|^2} \end{cases}. \quad (4.14)$$

I coefficienti  $|\gamma_0^a|^2$  e  $|\gamma^s|^2$  insieme a  $|\gamma_1^a|^2$  e  $|\gamma_{-1}^a|^2$  danno le quattro probabilità  $p(S, M)$ <sup>21</sup>, ovvero il risultato cercato.

### 4.3 Un altro caso particolare: Tre spin 1/2

Il caso di tre spin 1/2 è nettamente più complesso rispetto a quello a due spin 1/2, per l'intervento delle simmetrie parziali. Vediamo più precisamente cosa si intende:

Lo spazio di Hilbert di spin del sistema  $\mathcal{H}_{SPIN}$  è  $\mathcal{H}_{SPIN}^1 \otimes \mathcal{H}_{SPIN}^2 \otimes \mathcal{H}_{SPIN}^3$ , con  $\mathcal{H}_{SPIN}^i$  che indica lo spazio di spin della particella  $i$ -esima. Si può verificare che una possibile base in  $\mathcal{H}_{SPIN}$  è costituita dagli otto vettori<sup>22</sup>

$$|[1, 2, 3], \frac{3}{2}\rangle \equiv |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle,$$

---


$$^{20} \begin{cases} p_A = |\gamma^s|^2 + |\gamma_0^a|^2 \\ p_S p_A = [|\gamma^s|^2 + |\gamma_0^a|^2 |\alpha_0|^2] \end{cases} \rightarrow p_A - p_S p_A = |\gamma_0^a|^2 (1 - |\alpha_0|^2),$$

da questa risulta  $|\gamma_0^a|^2 = \frac{p_A(1-p_S)}{1-|\alpha_0|^2}$  e

$$|\gamma^s|^2 = p_A - |\gamma_0^a|^2 = \frac{p_A(1-|\alpha_0|^2) - p_A(1-p_S)}{1-|\alpha_0|^2} = \frac{p_A(p_S - |\alpha_0|^2)}{1-|\alpha_0|^2}. \quad (4.13)$$

<sup>21</sup>Come già accennato, per ottenere le probabilità associate alle osservabili  $S^2, \vec{S} \cdot \vec{n}$  invece che  $S^2, S_z$  si sfrutta il primo campo magnetico  $\vec{B}_1$ , ma il ragionamento qui presentato rimane invariato.

<sup>22</sup>I vettori dei membri di destra sono scritti nella stessa notazione spiegata alla nota 9. Le uguaglianze sono da intendersi nel senso di definizione dei vettori di sinistra mediante quelli di destra.

$$\begin{aligned}
|[1, 2, 3], \frac{1}{2}\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}}[|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle], \\
|[1, 2, 3], -\frac{1}{2}\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}}[|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle], \\
|[1, 2, 3], -\frac{3}{2}\rangle &\equiv |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle, \\
|\{1, 2\}, \frac{1}{2}\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle], \\
|\{1, 2\}, -\frac{1}{2}\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle], \\
|[1, 2], \frac{1}{2}\rangle &\equiv \sqrt{\frac{2}{3}}[|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{2}|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \frac{1}{2}|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle], \\
|[1, 2], -\frac{1}{2}\rangle &\equiv \sqrt{\frac{2}{3}}[|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - \frac{1}{2}|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{2}|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle]. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

I primi quattro, oltre ad essere completamente simmetrici (cioè simmetrici rispetto allo scambio di qualsiasi coppia di indici), sono autostati di  $S_z$  con autovalore indicato dall'ultimo numero che compare nel ket di sinistra ed autostati di  $S^2$  con autovalore  $\frac{3}{2}(\frac{3}{2} + 1)$ . I rimanenti quattro sono autostati di  $S^2$  con autovalore  $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)$ , con l'ultimo numero nel ket di sinistra che rappresenta ancora una volta l'autovalore di  $S_z$ . Il quinto ed il sesto sono antisimmetrici rispetto allo scambio delle particelle individuate dagli indici 1 e 2, mentre il settimo e l'ottavo sono simmetrici rispetto al medesimo scambio<sup>23</sup>. Diremo, quindi, che il quinto ed il sesto vettore sono caratterizzati dalla simmetria parziale  $\{1, 2\}$ , mentre il settimo e l'ottavo dalla simmetria parziale  $[1, 2]$ .

Nel prossimo paragrafo dimostreremo che la proprietà della matrice den-

---

<sup>23</sup>Anche se in maniera un po' lunga, tutte queste affermazioni possono essere verificate direttamente.

sità ridotta di spin di essere diagonale a blocchi nella rappresentazione dei vettori a simmetria definita (rispetto allo scambio di particelle) è verificata dal caso generale di  $N$  particelle identiche. Allora, ammettendo la validità di questa affermazione, la matrice  $\rho_S$  del caso a tre spin 1/2 (corrispondenti a particelle identiche), fissando come base quella dei vettori (4.15), è del tipo<sup>24</sup>:

$$\rho_S = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} & \xi_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} & \xi_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} & \xi_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{41} & \xi_{42} & \xi_{43} & \xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{11}^1 & \pi_{12}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{21}^1 & \pi_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{11}^2 & \pi_{12}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{21}^2 & \pi_{22}^2 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

che scriveremo anche come  $\rho_S = \xi \oplus \pi^1 \oplus \pi^2 = \xi \oplus_{i=1}^2 \pi^i$ .

La semplificazione (4.16) sulle forme possibili della  $\rho_S$  non basta per ricondurre la ricostruzione dello stato ad una misura dei soli operatori  $S^2$  e  $\vec{S} \cdot \vec{n}$ , per il fatto che, dal punto di vista del momento angolare, i blocchi  $\pi^1$  e  $\pi^2$  sono identici. Perciò, bisognerebbe effettuare una misura di un'osservabile  $O$ , compatibile con  $S^2$  e  $\vec{S} \cdot \vec{n}$ , in grado di discriminare tra gli stati a simmetria  $\{1, 2\}$  e quelli a simmetria  $[1, 2]$ . Fortunatamente, è possibile ottenere a priori altre informazioni sulla struttura della  $\rho_S$  che escluderanno la necessità di misurare  $O$ <sup>25</sup>. Specificatamente, si dimostrerà che  $\pi^1 = \pi^2$ .

Al fine di perseguire tale risultato, cominciamo col riscrivere la matrice

---

<sup>24</sup>L'ottenimento della (4.16) potrebbe essere anche eseguito in maniera diretta come per la (4.4). Avendo però a disposizione il risultato del paragrafo 4.4, si tratterebbe di un calcolo inutile.

<sup>25</sup>Se così non fosse il metodo di questo paragrafo sarebbe davvero poco interessante.

densità  $\rho$ , completa anche della parte configurazionale, come nella (4.2):

$$\rho = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|. \quad (4.17)$$

La più generale  $|\Psi_i\rangle$  è

$$\begin{aligned} |\Psi_i\rangle = & \sum_{j=-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} a_i^j |[1, 2, 3], i\rangle + f_i |\{1, 2\}, \frac{1}{2}\rangle + g_i |\{1, 2\}, -\frac{1}{2}\rangle + h_i |[1, 2], \frac{1}{2}\rangle + \\ & + l_i |[1, 2], -\frac{1}{2}\rangle, \end{aligned}$$

dove  $a_i^j, f_i, g_i, h_i, l_i$  sono vettori dello spazio delle configurazioni delle tre particelle. La loro dipendenza dalle variabili di particella singola, verrà indicata con espressioni del tipo  $f = f(1, 2, 3)$ . Imponendo la completa antisimmetria della  $\Psi_i$ , si ricavano le relazioni di trasformazione per scambio di indici delle  $a_i^j, f_i, g_i, h_i, l_i$ . Le  $a_i^j$  sono completamente antisimmetriche<sup>26</sup>, mentre solo per scambio degli indici 1 e 2 le  $f_i, g_i, h_i, l_i$  hanno proprietà di simmetria definite:

$$\begin{cases} f_i(1, 2, 3) = f_i(2, 1, 3) \\ g_i(1, 2, 3) = g_i(2, 1, 3) \\ h_i(1, 2, 3) = -h_i(2, 1, 3) \\ l_i(1, 2, 3) = -l_i(2, 1, 3) \end{cases} \quad (4.18)$$

Scambiando gli indici 2 e 3 i vettori  $|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle$ , che entrano nella definizione degli stati a simmetria parziale, si mischiano tra di loro; l'antisimmetria della  $\Psi_i$  per scambio di 2 e 3 porta, dopo qualche

---

<sup>26</sup>Si vedrà nel prossimo paragrafo che una funzione d'onda completamente antisimmetrica risulta dalla combinazione lineare di vettori con parte configurazionale completamente simmetrica e parte di spin completamente antisimmetrica (e viceversa) e di vettori in cui sia la parte configurazionale che di spin hanno simmetrie parziali.

passaggio algebrico, ad una relazione tra le  $f_i, g_i, h_i, l_i$ :

$$\begin{cases} f_i(1, 3, 2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}h_i(1, 2, 3) - \frac{1}{2}f_i(1, 2, 3) \\ h_i(1, 3, 2) = \frac{1}{2}h_i(1, 2, 3) - \frac{\sqrt{3}}{2}f_i(1, 2, 3) \\ g_i(1, 3, 2) = \frac{3}{2\sqrt{3}}l_i(1, 2, 3) - \frac{1}{2}g_i(1, 2, 3) \\ l_i(1, 3, 2) = \frac{\sqrt{3}}{2}g_i(1, 2, 3) + \frac{1}{2}l_i(1, 2, 3) \end{cases} . \quad (4.19)$$

Dalle (4.18) e (4.19)

$$\begin{aligned} & \vdots \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & \vdots \end{aligned}$$

(4.20)

## 4.4 Osservazioni sul caso generale a N spin 1/2

# Capitolo 5

## Generalizzazioni matematiche

I lemmi ed il teorema del terzo capitolo facevano riferimento esplicito al gruppo  $SU(2)$ . In ogni modo, come già accennato nel paragrafo 4.1, è palese osservare che la linea dimostrativa seguita non necessita delle particolarità di tale gruppo ed è quindi presumibile potere generalizzare tali risultati. L'estensione ad un'ampia categoria di gruppi della (3.1) fornisce alla teoria un aspetto più elegante. Al di là dei risvolti puramente estetici, permette anche l'ottenimento della (1.8) e di due semplici formule di tomografia di spin. Oltre a ciò, lascia spazio alla ricerca di altre rappresentazioni tomografiche della matrice densità ottica che migliorino l'errore statistico legato al metodo Monte Carlo. Non è da escludere, infine, l'eventualità che la teoria si possa utilmente applicare ad altri sistemi fisici.

Essenzialmente questo capitolo è diviso in due blocchi. Difatti, in accordo agli enunciati 2.3.2 e 2.3.3, la teoria generale deve essere sviluppata separatamente per gruppi finiti e di Lie compatti e per gruppi discreti e

di Lie non compatti, essendo lo spazio di Hilbert a supporto delle rappresentazioni di dimensione finita nel primo caso, infinita nel secondo. Dopo alcune osservazioni preliminari sulle rappresentazioni a meno di un fattore di fase, si studieranno i gruppi finiti e di Lie compatti ricavando il lemma ed il teorema della tomografia (rispettivamente l'analogo del lemma 3.1.3 e del teorema 3.1.4), per poi passare nel paragrafo 5.3 alle applicazioni di un caso particolare. Lo stesso tipo di enunciati, anche se con qualche limitazione, verrà ottenuto per i gruppi discreti e di Lie non compatti. Nel paragrafo 5.5 l'esame di un gruppo di Lie non compatto porterà alla (1.8).

## 5.1 Osservazioni sulle rappresentazioni a meno di un fattore di fase

L'estensione della teoria del capitolo 3 non è limitata alle normali rappresentazioni ma coinvolge anche le rappresentazioni a raggi. La comparsa di fattori di fase può essere d'ostacolo nelle dimostrazioni delle formule tomografiche, per cui conviene premettere alcune considerazioni generali sulle rappresentazioni a raggi.

Si consideri un gruppo  $\mathcal{G}$  ed una sua rappresentazioni a raggi  $\mathcal{D}$ . Il prodotto tra due operatori dà luogo alla (2.3), che per comodità viene riscritta:

$$\mathcal{D}(g_1)\mathcal{D}(g_2) = e^{i\gamma(g_1, g_2)}\mathcal{D}(g_3) \quad \text{se } g_1 \cdot g_2 = g_3, \quad (5.1)$$

con  $\gamma \in \mathbb{R}$  funzione di  $g_1$  e  $g_2$ . Sia  $e$  l'identità del gruppo  $\mathcal{G}$ . Allora

$$\mathcal{D}(e)\mathcal{D}(e) = \mathcal{D}(e \cdot e) e^{i\gamma(e, e)} = \mathcal{D}(e) e^{i\gamma(e, e)},$$

da cui moltiplicando entrambi i membri per  $\mathcal{D}^{-1}(e)$ <sup>1</sup>, indicando con  $I$  l'identità in  $\mathcal{H}$ , si ricava  $\mathcal{D}(e) = e^{i\gamma(e,e)} I$ , che equivale a  $I = \mathcal{D}(g \cdot g^{-1}) e^{-i\gamma(e,e)}$ . Essendo  $\mathcal{D}(g)\mathcal{D}^{-1}(g) = I$ , si ha allora

$$\mathcal{D}(g)\mathcal{D}^{-1}(g) = \mathcal{D}(g \cdot g^{-1}) e^{-i\gamma(e,e)}, \quad (5.2)$$

ma anche

$$\mathcal{D}(g)\mathcal{D}(g^{-1}) = \mathcal{D}(g \cdot g^{-1}) e^{i\gamma(g,g^{-1})}. \quad (5.3)$$

Il confronto della (5.2) e della (5.3) comporta l'equazione

$$\mathcal{D}(g^{-1}) = e^{i(\gamma(e,e)+\gamma(g,g^{-1}))} \mathcal{D}^{-1}(g). \quad (5.4)$$

Con lo stesso procedimento, ma a partire da  $\mathcal{D}(g^{-1} \cdot g)$  invece che da  $\mathcal{D}(g \cdot g^{-1})$ , sarebbe stata ricavata l'equazione  $\mathcal{D}(g^{-1}) = e^{i(\gamma(e,e)+\gamma(g^{-1},g))} \mathcal{D}^{-1}(g)$ , che implica

$$e^{i\gamma(g,g^{-1})} = e^{i\gamma(g^{-1},g)}. \quad (5.5)$$

La (5.4) indica che la relazione

$$\mathcal{D}(g^{-1}) = \mathcal{D}^{-1}(g), \quad (5.6)$$

cui soddisfano le normali rappresentazioni, non è in generale valida per le rappresentazioni proiettive. Ridefinendo le fasi di ogni operatore  $\mathcal{D}(g)$ , è

---

<sup>1</sup>È la definizione stessa di rappresentazione che implica l'invertibilità degli operatori  $\mathcal{D}(g)$ .

comunque possibile passare ad una rappresentazione proiettiva  $\mathcal{T}$  che soddisfi alla (5.6). A questo scopo, si consideri la seguente definizione:

$$\mathcal{T}(g) \equiv e^{-\frac{i}{2}(\gamma(g, g^{-1}) + \gamma(e, e))} \mathcal{D}(g); \quad (5.7)$$

$\mathcal{T}$  è ancora una rappresentazione a raggi di  $\mathcal{G}$ , infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(g_1)\mathcal{T}(g_2) &= e^{-\frac{i}{2}(\gamma(g_1, g_1^{-1}) + \gamma(g_2, g_2^{-1}) + 2\gamma(e, e))} \mathcal{D}(g_1)\mathcal{D}(g_2) = \\ &= e^{-\frac{i}{2}(\gamma(g_1, g_1^{-1}) + \gamma(g_2, g_2^{-1}) + 2\gamma(e, e) - 2\gamma(g_1, g_2))} \mathcal{D}(g_1 \cdot g_2) = \\ &= e^{-\frac{i}{2}(\gamma(g_1, g_1^{-1}) + \gamma(g_2, g_2^{-1}) + \gamma(e, e) - 2\gamma(g_1, g_2) - \gamma(g_1 \cdot g_2, (g_1 \cdot g_2)^{-1}))} \mathcal{T}(g_1 \cdot g_2) \equiv \\ &\equiv e^{i\xi(g_1, g_2)} \mathcal{T}(g_1 \cdot g_2), \end{aligned}$$

inoltre  $\mathcal{T}$  verifica la (5.6), come è facilmente dimostrabile:

$$\mathcal{T}(g)\mathcal{T}(g^{-1}) = e^{-\frac{i}{2}(\gamma(g, g^{-1}) + \gamma(g^{-1}, g) + 2\gamma(e, e))} \mathcal{D}(g)\mathcal{D}(g^{-1}) = \mathcal{D}(g)\mathcal{D}^{-1}(g) = I,$$

ossia<sup>2</sup>  $\mathcal{T}(g^{-1}) = \mathcal{T}^{-1}(g)$ .

Le rappresentazioni proiettive che soddisfano a (5.6), indicate d'ora in avanti con  $\mathcal{T}$ , presentano alcune semplici proprietà elencate qui di seguito:

**5.1.1** *Per una rappresentazione proiettiva  $\mathcal{T}$ , tale che  $\mathcal{T}(g^{-1}) = \mathcal{T}^{-1}(g)$ , i fattori di fase  $e^{i\xi}$  della definizione (5.1) verificano l'uguaglianza*

$$e^{i\xi(g_1, g_2)} = e^{-i\xi(g_2^{-1}, g_1^{-1})}. \quad (5.8)$$

---

<sup>2</sup>Passaggi analoghi porterebbero anche a  $\mathcal{T}(g^{-1})\mathcal{T}(g) = I$ .

Dimostrazione:  $\mathcal{T}(g_1)\mathcal{T}(g_2) = \mathcal{T}(g_1 \cdot g_2) e^{i\xi(g_1, g_2)}$ , facendo l'inverso utilizzando la (5.6), questa equazione diventa  $\mathcal{T}(g_2^{-1})\mathcal{T}(g_1^{-1}) = \mathcal{T}(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}) e^{-i\xi(g_1, g_2)}$ , da cui la tesi.

**5.1.2** *Nelle stesse ipotesi di 5.1.1, detto  $\eta$  il numero reale che soddisfa a  $\mathcal{T}(g_1^{-1})\mathcal{T}(g_2)\mathcal{T}(g_1) = \mathcal{T}(g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot g_1) e^{i\eta}$ , si ha*

$$\mathcal{T}(g_1^{-1})\mathcal{T}(g_2^{-1})\mathcal{T}(g_1) = \mathcal{T}(g_1^{-1} \cdot g_2^{-1} \cdot g_1) e^{-i\eta}.$$

Dimostrazione: Dall'ipotesi e dalla (5.6) segue che  $\mathcal{T}^{-1}(g_1) \mathcal{T}(g_2) \mathcal{T}(g_1) = \mathcal{T}(g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot g_1) e^{i\eta}$ . Invertendo entrambi i membri ed utilizzando ancora la (5.6), si ottiene immediatamente la tesi.

L'introduzione delle rappresentazioni  $\mathcal{T}$  non è strettamente necessaria per l'ottenimento della formula tomografica<sup>3</sup>, che, come sarà mostrato, vale per qualsiasi rappresentazione a raggi; tuttavia, grazie alla condizione (5.6) ed agli enunciati 5.1.1 e 5.1.2<sup>4</sup>, le dimostrazioni risulteranno notevolmente semplificate, potendo evitare le complicazioni legate ai fattori di fase.

---

<sup>3</sup>Con formula tomografica si intende la formula del teorema della tomografia.

<sup>4</sup>A questo punto del discorso è necessario fare una precisazione. Gli enunciati 5.1.1, 5.1.2 possono essere dimostrati, con qualche complicazione aggiuntiva, per una generica rappresentazione proiettiva. Del resto, per la dimostrazione della formula della tomografia, gli enunciati 5.1.1, 5.1.2 sono utili unicamente se usati insieme alla (5.6), che non è invece verificata da ogni rappresentazione proiettiva. Si è preferito quindi operare una scelta di massima semplicità nelle dimostrazioni successive, pur perdendo in generalità in due enunciati, peraltro non intrinsecamente interessanti.

## 5.2 Gruppi finiti e gruppi di Lie compatti

Cominciamo con l'ottenere i lemmi ed il teorema della tomografia per gruppi finiti, rinviando all'ultima parte di questo paragrafo una prima applicazione.

### Lemma 5.2.1 (Lemma della tomografia per gruppi finiti)

Se  $\mathcal{D}$  è una rappresentazione a raggi irriducibile di un gruppo finito  $\mathcal{G}$  di ordine  $n$  su di uno spazio  $\mathcal{H}$  di dimensione finita  $d$ , allora l'equazione

$$\mathrm{Tr} A = \frac{d}{n} \sum_g \mathcal{D}(g) A \mathcal{D}^{-1}(g), \quad (5.9)$$

dove  $I$  è l'operatore identità in  $\mathcal{H}$  e la somma su  $g$  è estesa a tutti gli elementi del gruppo<sup>5</sup>, è verificata per qualsiasi operatore lineare  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ .

Dimostrazione: Modifichiamo le fasi degli operatori  $\mathcal{D}(g)$  in accordo a (5.7), passando dalla rappresentazione  $\mathcal{D}$  alla rappresentazione  $\mathcal{T}$ . Ricorrendo alle (5.6) e (5.8), con la definizione  $l \equiv g \cdot h$ , si verifica che l'operatore  $\sum_g \mathcal{T}^{-1}(g) A \mathcal{T}(g)$  commuta con  $\mathcal{T}(h)$ , per ogni  $h$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{-1}(h) \sum_g \mathcal{T}^{-1}(g) A \mathcal{T}(g) \mathcal{T}(h) &= \\ &= \sum_g \mathcal{T}(h^{-1} \cdot g^{-1}) A \mathcal{T}(g \cdot h) e^{i\xi(h_1^{-1}, g_1^{-1})} e^{i\xi(g, h)} = \\ &= \sum_g \mathcal{T}(h^{-1} \cdot g^{-1}) A \mathcal{T}(g \cdot h) = \sum_l \mathcal{T}^{-1}(l) A \mathcal{T}(l). \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>Per semplicità, questa precisazione non verrà più fatta. Le somme su  $g$ , oppure gli integrali in  $d\mu(g)$ , ad eccezione dei casi in cui si precisi esplicitamente la parte del gruppo su cui devono essere eseguiti, vanno sempre intesi come comprendenti tutti gli elementi di  $\mathcal{G}$ .

Quindi, come conseguenza del secondo lemma di Schur<sup>6</sup>, è possibile scrivere  $\sum_g \mathcal{T}^{-1}(g) A \mathcal{T}(g) = c I$ . Osservando che questa equazione rimane valida pur cambiando le fasi degli operatori  $\mathcal{T}$ , per la presenza sia di  $\mathcal{T}(g)$  che di  $\mathcal{T}^{-1}(g)$ , si ricava

$$\sum_g \mathcal{D}^{-1}(g) A \mathcal{D}(g) = c I. \quad (5.10)$$

La traccia del primo membro della (5.10) è

$$\mathrm{Tr} \left[ \sum_g \mathcal{D}^{-1}(g) A \mathcal{D}(g) \right] = \sum_g \mathrm{Tr} A = n \mathrm{Tr} A,$$

mentre quella del secondo membro è  $\mathrm{Tr} [c I] = c d$ , da cui  $c = \frac{n}{d} \mathrm{Tr} A$ . Questo risultato, insieme a  $\sum_g \mathcal{D}^{-1}(g) A \mathcal{D}(g) = \sum_g \mathcal{D}(g) A \mathcal{D}^{-1}(g)$ , dimostra il lemma.

### **Teorema 5.2.2 (Teorema della tomografia per gruppi finiti)**

*Per  $d, n, A, \mathcal{D}$  definiti come nel lemma 5.2.1, vale l'identità operatoriale*

$$A = \frac{d}{n} \sum_g \mathrm{Tr} [A \mathcal{D}(g)] \mathcal{D}^{-1}(g). \quad (5.11)$$

Dimostrazione: Si applichi due volte il lemma 5.2.1, a partire dall'operatore

$$\frac{d}{n} \sum_g \mathrm{Tr} [A \mathcal{D}(g)] \mathcal{D}^{-1}(g):$$

$$\frac{d}{n} \sum_g \mathrm{Tr} [A \mathcal{D}(g)] \mathcal{D}^{-1}(g) =$$

---

<sup>6</sup>Nel capitolo 2 il secondo lemma di Schur è stato introdotto per le rappresentazioni ordinarie. Poichè nella sua dimostrazione si sfrutta unicamente l'irriducibilità, è immediato concludere che il lemma (2.2.2) valga anche per le rappresentazioni proiettive.

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{d}{n}\right)^2 \sum_{g, g'} \mathcal{D}(g') A \mathcal{D}(g) \mathcal{D}^{-1}(g') \mathcal{D}^{-1}(g) = \\
&= \frac{d}{n} \sum_{g'} \mathcal{D}(g') A \frac{d}{n} \sum_g \mathcal{D}(g) \mathcal{D}^{-1}(g') \mathcal{D}^{-1}(g) = \\
&= \frac{d}{n} \sum_{g'} \text{Tr}[\mathcal{D}^{-1}(g')] \mathcal{D}(g') A. \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Per completare la dimostrazione rimane solo da provare che

$$\sum_g \text{Tr}[\mathcal{D}^{-1}(g)] \mathcal{D}(g) = \frac{n}{d} I. \tag{5.13}$$

Passiamo, allora, dagli operatori  $\mathcal{D}(g)$  agli operatori  $\mathcal{T}(g)$ , secondo la (5.7).

La (5.6) e l'enunciato 5.1.2 consentono di scrivere<sup>7</sup>, per ogni  $h$ ,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}^{-1}(h) \sum_g \text{Tr}[\mathcal{T}^{-1}(g)] \mathcal{T}(g) \mathcal{T}(h) = \\
&= \sum_g \text{Tr}[\mathcal{T}^{-1}(h) \mathcal{T}^{-1}(g) \mathcal{T}(h)] \mathcal{T}^{-1}(h) \mathcal{T}(g) \mathcal{T}(h) = \\
&= \sum_g \text{Tr}[\mathcal{T}(h^{-1} \cdot g^{-1} \cdot h)] \mathcal{T}(h^{-1} \cdot g \cdot h) = \sum_l \text{Tr}[\mathcal{T}^{-1}(l)] \mathcal{T}(l),
\end{aligned}$$

che significa  $\sum_g \text{Tr}[\mathcal{D}^{-1}(g)] \mathcal{D}(g) = \tilde{c} I$  per il secondo lemma di Schur. Tracciando entrambi i membri di questa equazione, si ricava subito  $\tilde{c} = \frac{n}{d}$ . Infine, la stessa osservazione fatta alla fine della dimostrazione del lemma 5.2.1 permette di tornare alla rappresentazione  $\mathcal{D}$  senza modificare il risultato, fornendo cioè la (5.13), che, insieme alla (5.12), completa la dimostrazione.

Le formule tomografiche per gruppi di Lie compatti si ottengono esattamente come per i gruppi finiti con la sostituzione  $\frac{1}{n} \sum_g \rightarrow \int d\mu(g)$  e per

---

<sup>7</sup>Si ponga anche  $l \equiv h^{-1} \cdot g \cdot h$ .

questo non verranno riscritte. Scegliendo  $SU(2)$  come gruppo  $\mathcal{G}$ , risultano di nuovo le formule del paragrafo 3.1 <sup>8</sup>.

Prima di esaminare un caso particolare della (5.11), osserviamo che, per l'enunciato 2.3.1, non si perderebbe in generalità se si sostituisse  $\mathcal{D}^{-1}(g)$  con  $\mathcal{D}^\dagger(g)$ .

La (5.11) si presta ad un'interessante applicazione. Sia  $\mathcal{G}_2$  un gruppo di 8 elementi, con legge di composizione interna data dall'ordinario prodotto tra matrici, così definito:  $\mathcal{G}_2 = \{i\vec{\sigma}, -i\vec{\sigma}, I, -I\}$ , dove  $\sigma_i$  rappresenta una matrice di Pauli ( $i = x, y, z$ ). Definiamo la rappresentazione a raggi  $\mathcal{D}_2$  secondo le equazioni:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_2(i\sigma_j) &= \mathcal{D}_2(-i\sigma_j) = \sigma_j, \quad j = x, y, z, \\ \mathcal{D}_2(I) &= \mathcal{D}_2(-I) = I.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Applicando alla matrice  $\rho_s$  la formula (5.11) con rappresentazione  $\mathcal{D}_2$ , risulta<sup>9</sup>

$$\rho_s = \frac{1}{2} \sum_{j=x,y,z} \text{Tr}[\rho_s \sigma_j] \sigma_j + \frac{1}{2} I.\tag{5.15}$$

---

<sup>8</sup>Nel paragrafo 3.1 si aveva  $A = (2S + 1) \int d\mu(g) \text{Tr}[A \mathcal{R}^\dagger(g)] \mathcal{R}(g)$ , mentre secondo la (5.11) dovremmo scrivere  $A = (2S + 1) \int d\mu(g) \text{Tr}[A \mathcal{R}(g)] \mathcal{R}^\dagger(g)$ . È chiaro che le due forme sono equivalenti.

<sup>9</sup>Le tre matrici di Pauli e l'operatore identità sono chiaramente irriducibili su di uno spazio di dimensione 2. Per scrupolo, ciò verrà comunque dimostrato in seguito.

Se attribuiamo a  $\rho_s$  il significato di matrice densità di spin di una particella elementare con  $S = 1/2$ , allora la (5.15) si trasforma in<sup>10</sup>

$$\begin{aligned}\rho_s &= \frac{1}{2} \sum_{m=-1/2}^{1/2} \sum_{j=x,y,z} \langle \vec{n}_j, m | \rho_s | \vec{n}_j, m \rangle m \sigma_j + \frac{1}{2} I = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=-1/2}^{1/2} \sum_{j=x,y,z} p(\vec{n}_j, m) m \sigma_j + \frac{1}{2} I.\end{aligned}\quad (5.16)$$

Secondo la (5.16) le misure di  $S_x, S_y, S_z$  sono sufficienti per ricostruire lo stato quantistico  $\rho_s$ .

Si può fare discendere la (5.15) da un diverso tipo di analisi, come si mostrerà ora. Detto  $\mathcal{H}$  lo spazio di dimensione 2 su cui agiscono le matrici di Pauli, sia  $\mathcal{V}_o$  lo spazio vettoriale degli operatori lineari su  $\mathcal{H}$ .  $\mathcal{V}_o$  può essere reso uno spazio di Hilbert dotandolo del prodotto scalare<sup>11</sup>

$$\langle A, B \rangle_o \equiv \text{Tr}[A^\dagger B], \quad A, B \in \mathcal{V}_o. \quad (5.17)$$

Essendo  $\forall j \quad \text{Tr}[I^\dagger I] = \text{Tr}[\sigma_j^\dagger \sigma_j] = \text{Tr} I = 2$  ed anche,  $\forall i, j, k$  con  $j \neq k$ ,  $\text{Tr}[I^\dagger \sigma_i] = \text{Tr}[\sigma_j^\dagger \sigma_k] = 0$ , allora  $\{\frac{1}{\sqrt{2}} I, \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_x, \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_y, \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z\}$  costituisce una base in  $\mathcal{V}_o$ <sup>12</sup>. La relazione di completezza in  $\mathcal{V}_o$  consente di sviluppare

<sup>10</sup>Il significato dei simboli è lo stesso del capitolo 3.

<sup>11</sup>Il prodotto scalare (5.17) è lo stesso prodotto scalare dello spazio di Hilbert degli operatori di Hilbert–Schmidt [28].

<sup>12</sup>Ciò dimostra anche l'irriducibilità della rappresentazione (5.14). Infatti, se esistesse un sottospazio invariante per azione di  $\vec{\sigma}$  e  $I$ , sarebbe anche invariante per azione di qualsiasi combinazione lineare di questi quattro operatori. Poichè questi costituiscono una base in  $\mathcal{V}_o$ , tale sottospazio sarebbe invariante per applicazione di qualsiasi operatore, da cui l'assurdo. Con un certo ragionamento, che tralasciamo, si potrebbe anche concludere che gli operatori  $\vec{S}$  e  $I$  sono irriducibili solo su di uno spazio di dimensione due (a parte il caso banale di dimensione 1).

qualsiasi operatore  $\rho_s \in \mathcal{V}_o$  nella seguente maniera:

$$\rho_s = \frac{1}{2} \sum_j \langle \sigma_j, \rho_s \rangle_o \sigma_j + \frac{1}{2} \langle I, \rho_s \rangle_o I. \quad (5.18)$$

La (5.17) sostituita nella (5.18) fornisce la (5.15).

### 5.3 Sottogruppi finiti di $SU(2)$

La (5.15) non si generalizza facilmente ai casi  $S > 1/2$ , poichè non valgono le proprietà delle matrici di Pauli  $\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k$  e  $\sigma_i^2 = I$ . È però possibile inquadrare la (5.15) in un contesto più generale, osservando che il gruppo  $\mathcal{G}_2$  è un sottogruppo finito di  $SU(2)$ . Infatti, il generico elemento  $u(\vec{n}, \psi)$  di  $SU(2)$  ha la forma<sup>13</sup>

$$u(\vec{n}, \psi) = I \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right), \quad (5.19)$$

e gli elementi di  $\mathcal{G}_2$  risultano dalla (5.19) scegliendo  $\vec{n} = \pm \vec{n}_{x,y,z}$ ,  $\psi = \pi$  e  $\psi = 0, 2\pi$ . Ora, invece di procedere come nel precedente paragrafo introducendo la rappresentazione  $\mathcal{D}_2$ , avendo in mente l'obiettivo di lavorare sul generico valore di  $S$ , siamo portati a considerare la rappresentazione (2.13). Poichè, per l'idempotenza delle matrici di Pauli, è

$$I \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - i \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) = e^{-\frac{i}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \psi},$$

allora le matrici della rappresentazione (2.13) corrispondenti ad elementi di  $\mathcal{G}_2$  coincidono con gli elementi di  $\mathcal{G}_2$  e possono quindi essere utilizzate per

---

<sup>13</sup>Come nel capitolo 2,  $\psi \in [0, 2\pi]$  e  $\vec{n}$  è un versore.

rappresentare  $\mathcal{G}_2$  stesso<sup>14</sup>. La (5.11) applicata a questa rappresentazione di  $\mathcal{G}_2$  porta ancora alla (5.15), come si può facilmente verificare.

Per spin  $S$  generico si deve trovare un sottogruppo finito di  $SU(2)$ , tale che la sua rappresentazione in termini di operatori della forma (2.13) sia irriducibile in spazi di dimensione  $2S + 1$ . Limitiamoci al caso di  $S = 1$ . Per  $S$  intero le rappresentazioni (2.13) sono anche rappresentazioni di  $SO(3)$  (gruppo delle rotazioni proprie in tre dimensioni) e, perciò, è conveniente cercare i sottogruppi finiti di  $SO(3)$ , avendo questi il vantaggio di possedere la metà degli elementi del corrispondente sottogruppo di  $SU(2)$ . È risultato noto [17] che il gruppo tetraedrico, costituito da 12 elementi, ammetta una rappresentazione irriducibile in uno spazio di dimensione 3 equivalente a quella costituita da operatori della forma (2.13). Indichiamo con  $\vec{u}_i$ , con  $i = 1, \dots, 4$ , uno dei versori  $\sqrt{\frac{1}{3}}(1, 1, 1)$ ,  $\sqrt{\frac{1}{3}}(1, -1, -1)$ ,  $\sqrt{\frac{1}{3}}(-1, 1, -1)$ ,  $\sqrt{\frac{1}{3}}(-1, -1, 1)$ , con  $\vec{v}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , uno dei versori  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  e, infine, poniamo  $\vec{w}_i \equiv -\vec{u}_i$ . Allora il gruppo tetraedrico è composto dalle rotazioni di  $\frac{2\pi}{3}$  intorno agli assi  $\vec{u}_i$ ,  $\vec{w}_i$ , dalle rotazioni di  $\pi$  intorno agli assi  $\vec{v}_k$  e dalla rotazione nulla (o, se si preferisce, di  $2\pi$ ). Applicando la (5.11), con i soliti passaggi algebrici per fare comparire le probabilità, si ricava

$$\rho_s = \frac{1}{4} \sum_{m=-1}^1 \sum_{j=1}^7 p(\vec{n}_j, m) \mathcal{K}_j(m - \vec{S} \cdot \vec{n}_j) + \frac{1}{4} I, \quad (5.20)$$

---

<sup>14</sup>In questi casi si parla di “self-representation”.

con le definizioni

$$\vec{n}_j \equiv \begin{cases} u_j & j = 1, \dots, 4 \\ v_{j-4} & j = 5, 6, 7 \end{cases},$$

$$\mathcal{K}_j(m - \vec{S} \cdot \vec{n}_j) \equiv \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{3}(m - \vec{S} \cdot \vec{n}_j)\right) & j = 1, \dots, 4 \\ e^{-i\pi(m - \vec{S} \cdot \vec{n}_j)} & j = 5, 6, 7 \end{cases}.$$

La (5.20) fissa la relazione analitica tra il risultato delle misure del momento angolare di spin in 7 particolari direzioni e la forma della matrice densità di spin.

In generale, all'aumento del valore di  $S$  corrisponde un aumento nel numero di misure ed un sottogruppo di  $SU(2)$  più grande (ammesso che sia possibile trovarlo). Solo la considerazione dell'intero gruppo  $SU(2)$  permette di trattare tutti i valori di  $S$  alla stessa stregua, ma a prezzo di introdurre un notevole ridondanza di informazioni da ottenere sperimentalmente. Il numero di misure previsto per i casi  $S = 1/2$  e  $S = 1$  dalle (5.16) e (5.20) non è comunque minimo. Infatti, una matrice densità  $2 \times 2$  ha solo due elementi di matrice indipendenti, di contro la (5.16) necessita di tre valori sperimentali, per cui uno di questi sarà esprimibile in termini degli altri due<sup>15</sup>. Similmente, per  $S = 1$  sarebbero sufficienti cinque misure e non le sette della (5.20).

Con questo paragrafo si chiude la tomografia di spin. Prima di passare agli spazi di Hilbert di dimensione infinita, è importante fare notare che tutte

---

<sup>15</sup>Questo significa che si potrebbe calcolare a priori la dipendenza di una delle probabilità in funzione delle altre due; sostituendo tale espressione nella (5.16) ci si potrebbe poi limitare a misurare due sole probabilità.

le formule dei capitoli 3 e 4 corrispondenti a spazi di dimensione due e tre possono essere semplificate sostituendo la (3.2) con la (5.16) o (5.20).

## 5.4 Gruppi discreti e gruppi di Lie non compatti

Il lemma ed il teorema della tomografia su spazi di dimensione infinita sono molto simili a quelli su spazi di dimensione finita, ma il loro ottenimento è più complesso ed è necessario introdurre delle ipotesi più restrittive. Una prima limitazione riguarda la presenza di espressioni del tipo  $\text{Tr } A$ ,  $\text{Tr } [ A \mathcal{D}(g) ]$  che non sono in generale definite per operatori su spazi di dimensione infinita. Di conseguenza, è necessario assumere che  $A$  sia di classe traccia<sup>16</sup> e che la rappresentazione  $\mathcal{D}$  sia unitaria (il prodotto di un operatore di classe traccia con un operatore unitario è un operatore di classe traccia). In secondo luogo, per essere sicuri di scrivere espressioni matematicamente sensate, bisogna ipotizzare la convergenza di certe serie numeriche, come sarà spiegato più avanti. Infine, dovendo utilizzare il lemma di Schur, bisogna verificarne la validità per spazi di dimensione infinita, essendo normalmente dimostrato nel caso finito dimensionale. Ammetteremo l'estensione del lemma di Schur a spazi infinito dimensionali, per rappresentazioni a raggi  $\mathcal{D}$  unitarie ed irriducibili ed operatori lineari  $M$ , con  $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(M^\dagger) = \mathcal{H}$ <sup>17</sup>, tali che  $\mathcal{D}(g) M = M \mathcal{D}(g)$

---

<sup>16</sup>Lo spazio degli operatori di classe traccia verrà indicato con  $\tau_c(\mathcal{H})$ .

<sup>17</sup>Il simbolo  $\mathfrak{D}$  indica il dominio di un operatore. L'ipotesi  $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(M^\dagger)$ , nonostante possa forse essere indebolita, è sufficiente al conseguimento del teorema della tomografia. Per questo motivo non si approfondirà la questione della scelta migliore delle ipotesi.

per ogni  $g \in \mathcal{G}$ , per le seguenti motivazioni:

Innanzitutto, mostriamo come sia sufficiente considerare gli operatori autoaggiunti. Per ipotesi

$$\mathcal{D}(g) M = M \mathcal{D}(g) \quad \forall g \in \mathcal{G}, \quad (5.21)$$

per cui  $M^\dagger \mathcal{D}^\dagger(g) = \mathcal{D}^\dagger(g) M^\dagger$ <sup>18</sup>, che fornisce, moltiplicando a destra e sinistra per  $\mathcal{D}(g)$ ,

$$\mathcal{D}(g) M^\dagger = M^\dagger \mathcal{D}(g) \quad \forall g \in \mathcal{G}. \quad (5.22)$$

Per la (5.21) e (5.22) gli operatori autoaggiunti  $H_1 \equiv M + M^\dagger$  e  $H_2 \equiv i(M - M^\dagger)$  commutano con ogni  $\mathcal{D}(g)$ . Se la commutazione tra  $\mathcal{D}(g)$  e un qualsiasi operatore autoaggiunto  $H$  implicasse che  $H$  è un multiplo dell'identità, allora anche l'operatore  $M = \frac{1}{2}(H_1 - iH_2)$  sarebbe un multiplo dell'identità  $I$ . Restringiamo, allora, la nostra attenzione agli operatori autoaggiunti  $H$ . Supponiamo, inizialmente, che esista almeno un vettore  $|\tilde{h}\rangle \in \mathcal{H}$  che soddisfi a

$$H|\tilde{h}\rangle = \tilde{h}|\tilde{h}\rangle \quad (5.23)$$

e consideriamo l'insieme  $V$  dei vettori  $|\tilde{h}\rangle$  di  $\mathcal{H}$  che verificano alla (5.23) con lo stesso autovalore  $\tilde{h}$ . L'insieme  $V$  deve essere l'intero spazio di Hilbert,

---

<sup>18</sup>Si ricordi che affinché un operatore ammetta aggiunto deve essere densamente definito. Del resto, vista la definizione di  $H_1$  e  $H_2$ , sia  $\mathfrak{D}(M)$  che  $\mathfrak{D}(M^\dagger)$  devono essere densi in  $\mathcal{H}$ . Le ipotesi potrebbero dunque essere indebolite passando da  $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(M^\dagger) = \mathcal{H}$  a  $\mathfrak{D}(M) = \mathfrak{D}(M^\dagger)$  densi in  $\mathcal{H}$ , ma come già detto, non ci si preoccuperà di questo tipo di problemi.

altrimenti, essendo  $H \mathcal{D}(g)|\tilde{h}\rangle = \mathcal{D}(g) H|\tilde{h}\rangle = \tilde{h} \mathcal{D}(g)|\tilde{h}\rangle$ , lo spazio sotteso da  $|\tilde{h}\rangle$  sarebbe invariante per azione di tutti i  $\mathcal{D}(g)$ , in disaccordo alle ipotesi di irriducibilità della rappresentazione  $\mathcal{D}$ . Del resto,  $V = \mathcal{H}$  equivale a  $H = \tilde{h} I$ , ossia all'enunciato del lemma di Schur. Se non esistesse alcun autovalore tale che la (5.23) sia verificata da almeno un vettore  $|h\rangle \in \mathcal{H}$ , allora, per l'autoaggiuntezza, lo spettro  $\sigma$  di  $H$  sarebbe puramente continuo. Mostriamo ora che questa circostanza non è possibile. A questo scopo, fissiamo un punto  $\tilde{h} \in \sigma$  e consideriamo l'intervallo  $[\tilde{h} - \epsilon, \tilde{h} + \epsilon]$  avente intersezione di misura positiva con  $\sigma$ . Lo spazio  $V'$  dei vettori  $\int_{\tilde{h}-\epsilon}^{\tilde{h}+\epsilon} dh f(h) |h\rangle$ <sup>19</sup> è invariante per applicazione dei  $\mathcal{D}(g)$ , infatti  $\mathcal{D}(g) \int_{\tilde{h}-\epsilon}^{\tilde{h}+\epsilon} dh f(h) |h\rangle = \int_{\tilde{h}-\epsilon}^{\tilde{h}+\epsilon} dh f(h) \mathcal{D}(g) |h\rangle$  appartiene a  $V$  poichè  $\mathcal{D}(g)|h\rangle$  soddisfa, in virtù di  $[\mathcal{D}(g), H] = 0$ , alla (5.23) con autovalori appartenenti ancora a  $[\tilde{h} - \epsilon, \tilde{h} + \epsilon]$ . Per l'ipotesi di irriducibilità di  $\mathcal{D}$ ,  $V'$  deve coincidere con  $\mathcal{H}$ , per cui  $\sigma = [\tilde{h} - \epsilon, \tilde{h} + \epsilon] \cap \sigma$ , che per l'arbitrarietà di  $\epsilon$ , comporta la riduzione dello spettro al solo punto  $\tilde{h}$ . Questo prova che  $H$  non può avere spettro puramente continuo, dovendo quest'ultimo avere la potenza del continuo.

Il lemma di Schur e la limitazione agli operatori  $A$  di classe traccia e a rappresentazioni  $\mathcal{D}$  unitarie non sono sufficienti a fornire le formule tomografiche.

---

<sup>19</sup>Se  $[\tilde{h} - \epsilon, \tilde{h} + \epsilon] \not\subset \sigma$ , l'integrale si intende esteso a  $[\tilde{h} - \epsilon, \tilde{h} + \epsilon] \cap \sigma$ . Inoltre, la funzione  $f(h)$  è generica, a patto che sia modulo quadro integrabile su  $[\tilde{h} - \epsilon, \tilde{h} + \epsilon] \cap \sigma$ .

Infatti, come sarà presto chiaro, si dovrà anche assumere che<sup>20</sup>

$$\sum_g |\langle u | \mathcal{D}(g) | v \rangle|^2 < \infty \quad \forall |u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{H}. \quad (5.24)$$

Mentre le altre ipotesi, oltre a non essere eliminabili, non costituiscono una limitazione<sup>21</sup>, la (5.24) risulta un po' più problematica dovendo essere controllata caso per caso. È ipotizzabile, comunque, la possibilità di dimostrare la (5.24) per ogni rappresentazione proiettiva unitaria ed irriducibile o, almeno, per una certa sottoclasse<sup>22</sup>. Alla fine del lemma 5.4.1 ci si convincerà comunque che la (5.24) può essere sostituita dalla condizione più semplice:

$$\exists |u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{H} : \sum_g |\langle u | \mathcal{D}(g) | v \rangle|^2 < \infty. \quad (5.25)$$

Fatte queste precisazioni, il lemma della tomografia per gruppi discreti verrà così formulato:

**Lemma 5.4.1 (Lemma della tomografia per gruppi discreti)**

*Sia  $\mathcal{D}$  una rappresentazione a raggi unitaria ed irriducibile su di uno spazio  $\mathcal{H}$  infinito dimensionale e sia l'operatore  $A \in \tau_c(\mathcal{H})$ . Se inoltre è verificata*

---

<sup>20</sup>La somma su tutti gli elementi  $g \in \mathcal{G}$  della (5.24) è ben definita. Infatti, essendo  $\mathcal{G}$  discreto, esiste una funzione biunivoca  $f$  tra  $\mathcal{G}$  e  $\mathbb{N}$ , per cui è possibile numerare gli elementi di  $\mathcal{G}$  con un indice naturale in modo da scrivere la somma su  $\mathcal{G}$  come un'ordinaria serie numerica. L'assunzione (5.24), ovvero l'assoluta convergenza della serie della (5.24), garantisce poi che il valore della serie non dipenda dalla scelta della corrispondenza biunivoca  $f$ .

<sup>21</sup>Assumere che  $A \in \tau_c(\mathcal{H})$  è una ipotesi del tutto naturale, in quanto le formule tomografiche si applicano alla matrice densità.

<sup>22</sup>Questa affermazione nasce dal non avere trovato ancora un caso in cui la (5.24) non valga. Si veda comunque anche la nota 28.

la condizione (5.24), allora

$$\text{Tr } A = \frac{1}{\tilde{k}} \sum_g \mathcal{D}(g) A \mathcal{D}^\dagger(g), \quad (5.26)$$

con  $\tilde{k} \equiv \sum_g |\langle \alpha | \mathcal{D}(g) | \beta \rangle|^2$  indipendente dalla scelta dei vettori normalizzati  $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}$ .

Dimostrazione: La (5.24) implica

$$\sum_g |\langle a | \mathcal{D}(g) | b \rangle \langle c | \mathcal{D}^\dagger(g) | d \rangle| \leq \left[ \sum_g |\langle a | \mathcal{D}(g) | b \rangle|^2 \sum_g |\langle d | \mathcal{D}(g) | c \rangle|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

che definisce univocamente la serie  $\sum_g \langle a | \mathcal{D}(g) | b \rangle \langle c | \mathcal{D}^\dagger(g) | d \rangle$  per ogni  $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle, |d\rangle \in \mathcal{H}$ , in accordo alla nota 20 della precedente pagina. Di conseguenza, anche l'operatore

$$\sum_g \mathcal{D}(g) |u\rangle \langle v| \mathcal{D}^\dagger(g) \quad (5.27)$$

è ben definito  $\forall |u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{H}$ <sup>23</sup>. Applicando il lemma di Schur a (5.27) e procedendo come nella dimostrazione del lemma 5.2.1<sup>24</sup> si ricava

$$\sum_g \mathcal{D}(g) |u\rangle \langle v| \mathcal{D}^\dagger(g) = k_{u,v} I, \quad (5.28)$$

con  $k_{u,v} \in \mathbb{C}$  dipendente in generale dalla scelta di  $|u\rangle, |v\rangle$ . Detto  $|w\rangle$  un vettore normalizzato di  $\mathcal{H}$ , la costante  $k_{w,w}$  può essere valutata facilmente<sup>25</sup>:

$$k_{w,w} = \langle w | k_{w,w} I | w \rangle = \langle w | \sum_g \mathcal{D}(g) | w \rangle \langle w | \mathcal{D}^\dagger(g) | w \rangle = \sum_g |\langle w | \mathcal{D}(g) | w \rangle|^2.$$

<sup>23</sup>L'operatore (5.27) deve essere inteso come il limite in senso debole della successione delle somme parziali  $\sum_g^n \mathcal{D}(g) |u\rangle \langle v| \mathcal{D}^\dagger(g)$  [28].

<sup>24</sup>Nel lemma 5.2.1 si dimostrava in realtà che  $\sum_g \mathcal{D}^\dagger(g) |u\rangle \langle v| \mathcal{D}(g)$  è un multiplo dell'identità. In ogni caso, si dimostra allo stesso modo che anche  $\sum_g \mathcal{D}(g) |u\rangle \langle v| \mathcal{D}^\dagger(g)$  ha la stessa proprietà.

<sup>25</sup>La possibilità di portare i prodotti scalari dentro le serie è garantita dalla continuità del funzionale lineare prodotto scalare.

Mediante la (5.28), la costante  $k_{u,v}$  può essere espressa in termini di  $k_{w,w}$  nel seguente modo (siano  $|a\rangle, |b\rangle$  due vettori qualsiasi):

$$\begin{aligned}
\langle a | \sum_g \mathcal{D}(g) | u \rangle \langle v | \mathcal{D}^\dagger(g) | b \rangle &= \langle v | \sum_g \mathcal{D}^\dagger(g) | b \rangle \langle a | \mathcal{D}(g) | u \rangle = \\
&= \langle v | u \rangle \sum_g \mathcal{D}^\dagger(g) | b \rangle \langle a | \mathcal{D}(g) = \langle v | u \rangle \langle a | \sum_g \mathcal{D}(g) | w \rangle \langle w | \mathcal{D}^\dagger(g) | b \rangle = \\
&= \langle v | u \rangle k_{w,w} \langle a | I | b \rangle,
\end{aligned}$$

ovvero

$$\sum_g \mathcal{D}(g) | u \rangle \langle v | \mathcal{D}^\dagger(g) = k_{w,w} \langle v | u \rangle I. \quad (5.29)$$

Inoltre, prendendo  $|u\rangle = |v\rangle = |\beta\rangle$  normalizzato e calcolando il valor medio dei due membri della (5.29) sul vettore normalizzato  $|\alpha\rangle$ , si ottiene

$$\sum_g |\langle \alpha | \mathcal{D}(g) | \beta \rangle|^2 = k_{w,w}, \quad (5.30)$$

per cui tale valore numerico, non dipendendo dalla scelta dei vettori utilizzati per calcolarlo, verrà indicato con  $\tilde{k}$ .

Lo sviluppo di Schmidt degli operatori di classe traccia fornisce

$$A = \sum_i \alpha_i |u_i\rangle \langle v_i|, \quad (5.31)$$

con  $\{|u_i\rangle\}$  e  $\{|v_i\rangle\}$  sistemi ortonormali completi e  $\sum_i \alpha_i < \infty$ ,  $\alpha_i > 0 \quad \forall i$ .

Per essere sicuri che l'espressione  $\sum_g \mathcal{D}(g) A \mathcal{D}^\dagger(g)$  abbia significato, verifichiamo la convergenza assoluta di un suo qualsiasi elemento di matrice

$$\langle a | \sum_g \mathcal{D}(g) A \mathcal{D}^\dagger(g) | b \rangle = \sum_g \sum_i \alpha_i \langle a | \mathcal{D}(g) | u_i \rangle \langle v_i | \mathcal{D}^\dagger(g) | b \rangle. \quad (5.32)$$

La disuguaglianza

$$\sum_g |\langle a | \mathcal{D}(g) | u_i \rangle \langle v_i | \mathcal{D}^\dagger(g) | b \rangle| \leq \left[ \sum_g |\langle a | \mathcal{D}(g) | u_i \rangle|^2 \sum_g |\langle b | \mathcal{D}(g) | v_i \rangle|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \tilde{k},$$

insieme al fatto che  $\alpha_i > 0$  e  $\sum_i \alpha_i < \infty$ , garantisce che la somma dei valori assoluti dei termini della (5.32) sia  $\leq \tilde{k} \sum_i \alpha_i < \infty$ . La convergenza assoluta permette anche di scambiare le due serie, permettendo di ottenere la tesi del lemma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{k}} \sum_g \mathcal{D}(g) A \mathcal{D}^\dagger(g) &= \sum_i \sum_g \alpha_i \mathcal{D}(g) | u_i \rangle \langle v_i | \mathcal{D}^\dagger(g) = \\ &= \sum_i \alpha_i \langle v_i | u_i \rangle I = \text{Tr } A. \end{aligned}$$

Per dimostrare la (5.30) è stato necessario ipotizzare a priori la (5.24). Verrà ora mostrato come sia in realtà sufficiente assumere la convergenza di una sola serie, sostituendo nelle ipotesi del lemma la (5.24) con (5.25). Limitiamoci quindi a supporre che valga (5.25) per due vettori  $|w_1\rangle, |w_2\rangle$  (che possono anche coincidere). Consideriamo l'insieme  $V$  dei vettori  $|v\rangle \in \mathcal{H}$  della forma

$$|v\rangle = \sum_g v_g \mathcal{D}(g) |w_i\rangle, \quad \text{con } \sum_g |v_g| < \infty, \quad (5.33)$$

con  $i$  che può essere 1 o 2.  $V$  è un sottospazio di  $\mathcal{H}$ , poichè  $\alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle$  appartiene a  $V$ , essendo  $\sum_g |\alpha v_{1g} + \beta v_{2g}| \leq |\alpha| \sum_g |v_{1g}| + |\beta| \sum_g |v_{2g}| <$

$< \infty$ <sup>26</sup>. Applicando qualsiasi  $\mathcal{D}(h)$  ad un vettore  $|v\rangle \in V$ , si ottiene ancora un vettore di  $V$ , infatti  $\mathcal{D}(h)|v\rangle = \sum_g v_g \mathcal{D}(h \cdot g) |w_i\rangle = \sum_g v_{h^{-1} \cdot g} \mathcal{D}(g) |w_i\rangle$ , con  $\sum_g |v_{h^{-1} \cdot g}| = \sum_g |v_g| < \infty$ . Per l'irriducibilità dei  $\mathcal{D}(g)$ , si ha  $V = \mathcal{H}$ , cioè qualsiasi vettore di  $\mathcal{H}$  può essere sviluppato nella forma (5.33). Allora, dato un qualsiasi vettore  $|v\rangle$ , si ha:

$$\begin{aligned}
\sum_g |\langle w_2 | \mathcal{D}(g) |v\rangle|^2 &= \sum_g \left| \sum_{g_1} v_{g_1} \langle w_2 | \mathcal{D}(g) \mathcal{D}(g_1) |w_1\rangle \right|^2 = \\
&= \sum_g \sum_{g_1} \sum_{g_2} v_{g_1}^* v_{g_2} \langle w_2 | \mathcal{D}(g) \mathcal{D}(g_1) |w_1\rangle^* \langle w_2 | \mathcal{D}(g) \mathcal{D}(g_2) |w_1\rangle \leq \\
&\leq \sum_{g_1, g_2} |v_{g_1}| |v_{g_2}| \sum_g \left| \langle w_2 | \mathcal{D}(g) \mathcal{D}(g_1) |w_1\rangle \langle w_2 | \mathcal{D}(g) \mathcal{D}(g_2) |w_1\rangle \right| \leq \\
&\leq \sum_{g_1, g_2} |v_{g_1}| |v_{g_2}| \left[ \sum_g |\langle w_2 | \mathcal{D}(g) \mathcal{D}(g_1) |w_1\rangle|^2 \sum_g |\langle w_2 | \mathcal{D}(g) \mathcal{D}(g_2) |w_1\rangle|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= \left( \sum_{g_1} |v_{g_1}| \right)^2 \tilde{k} < \infty \tag{5.34}
\end{aligned}$$

che è quanto si voleva dimostrare<sup>27 28</sup>.

Abbiamo tutti gli ingredienti per potere dimostrare il teorema della tomografia:

---

<sup>26</sup>È sempre stato usato il termine sottospazio per indicare in generale le varietà lineari chiuse e non chiuse. Questo dettaglio non ha comunque importanza, in quanto la distinzione tra le varietà lineari chiuse e non chiuse non comporta nessuna modifica di quanto fatto fino ad ora (e di quanto si farà).

<sup>27</sup>Si sarebbe anche potuto mettere al posto di  $\langle w_2 |$  un generico  $\langle u |$  e sviluppandolo nella forma (5.33), il risultato sarebbe stato lo stesso.

<sup>28</sup>La possibilità di scrivere la (5.33) indipendentemente dalla (5.25) può fare supporre che si possa dimostrare il lemma 5.4.1 eliminando perfino l'ipotesi (5.25). Tuttavia, come già detto, ciò non è stato ancora formalmente dimostrato.

**Teorema 5.4.2 (Teorema della tomografia per gruppi discreti)**

Nelle ipotesi del lemma 5.4.1 (con la (5.24) sostituita dalla (5.25)) vale l'identità operatoriale:

$$A = \frac{1}{k} \sum_g \operatorname{Tr} [A \mathcal{D}(g)] \mathcal{D}^\dagger(g). \quad (5.35)$$

Dimostrazione: Sia  $O$  un operatore di classe traccia, invertibile ed autoaggiunto con semplice funzione ausiliaria. In analogia alla dimostrazione del caso finito, dobbiamo considerare l'espressione

$$\sum_g \operatorname{Tr} [A \mathcal{D}(g)] O \mathcal{D}^\dagger(g), \quad (5.36)$$

ed applicare due volte il lemma 5.4.1. Prima di procedere, però, si pone il solito problema di verificare che (5.36) converga ad un operatore e che sia quindi un'espressione ben definita. Per dimostrare questo punto, ricordiamo che una delle forme del teorema di Riesz–Fisher [28] afferma che data una successione di numeri  $x_i$  e data una successione di vettori  $\phi_i$  di uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , la serie  $\sum_i x_i \phi_i$  converge ad un elemento di  $\mathcal{H}$  se  $\sum_i |x_i|^2 < \infty$ . Ora, l'operatore  $O \mathcal{D}^\dagger(g)$  è un elemento dello spazio di Hilbert degli operatori di Hilbert–Schmidt, per cui basta  $\sum_g |\operatorname{Tr}[A \mathcal{D}(g)]|^2 < \infty$  per potere affermare che la serie  $\sum_g \operatorname{Tr}[A \mathcal{D}(g)] O \mathcal{D}^\dagger(g)$  sia un operatore di Hilbert–Schmidt<sup>29</sup>. L'ipotesi  $A \in \tau_c(\mathcal{H})$  consente di sviluppare  $A$  secondo la (5.31)

---

<sup>29</sup>Per la precisione, la serie converge in norma ad un operatore di Hilbert–Schmidt. Sarebbe facile dimostrare che questo tipo di convergenza implichi quella debole nominata nella dimostrazione del lemma 5.4.1.

dando  $\text{Tr}[A \mathcal{D}(g)] = \sum_i \alpha_i \langle v_i | \mathcal{D}(g) | u_i \rangle$ , da cui, procedendo come per la (5.34),

$$\sum_g |\text{Tr}[A \mathcal{D}(g)]|^2 = \sum_g \left| \sum_i \alpha_i \langle v_i | \mathcal{D}(g) | u_i \rangle \right|^2 \leq \left( \sum_i \alpha_i \right)^2 \tilde{k} < \infty.$$

Applichiamo allora la (5.26) alla (5.36)<sup>30</sup>:

$$\begin{aligned} \sum_g \text{Tr}[A \mathcal{D}(g)] O \mathcal{D}^\dagger(g) &= \frac{1}{\tilde{k}} \sum_{g, g'} \mathcal{D}(g') A \mathcal{D}(g) \mathcal{D}^\dagger(g') O \mathcal{D}^\dagger(g) = \\ &= \sum_{g'} \mathcal{D}(g') A \text{Tr}[\mathcal{D}^\dagger(g) O] = \sum_g \text{Tr}[O \mathcal{D}^\dagger(g)] \mathcal{D}(g) A, \end{aligned}$$

ovvero

$$\sum_g \text{Tr}[A \mathcal{D}(g)] O \mathcal{D}^\dagger(g) = \sum_g \text{Tr}[O \mathcal{D}^\dagger(g)] \mathcal{D}(g) A. \quad (5.37)$$

Siano  $|a\rangle, |b\rangle$  due vettori normalizzati, come caso particolare della (5.37), possiamo scrivere

$$\sum_g \text{Tr}[|a\rangle\langle a| \mathcal{D}(g)] |b\rangle\langle b| \mathcal{D}^\dagger(g) = \sum_g \text{Tr}[|b\rangle\langle b| \mathcal{D}^\dagger(g)] \mathcal{D}(g) |a\rangle\langle a|. \quad (5.38)$$

Per  $|a\rangle = |b\rangle$  si ottiene

$$\sum_g \text{Tr}[|a\rangle\langle a| \mathcal{D}(g)] |a\rangle\langle a| \mathcal{D}^\dagger(g) = \tilde{k} |a\rangle\langle a|, \quad (5.39)$$

infatti, per ogni  $|u\rangle$  ortogonale a  $|a\rangle$ ,

$$\sum_g \text{Tr}[|a\rangle\langle a| \mathcal{D}(g)] |a\rangle\langle a| \mathcal{D}^\dagger(g) |u\rangle = \sum_g \text{Tr}[|b\rangle\langle b| \mathcal{D}^\dagger(g)] \mathcal{D}(g) |a\rangle\langle a| u\rangle = 0,$$

---

<sup>30</sup>Per non appesantire ulteriormente la dimostrazione, da adesso in poi si procederà in maniera piuttosto diretta non soffermandosi più sulla definizione delle serie o sulla possibilità di scambiare due di queste, essendo peraltro possibile verificare questo genere di questioni con i metodi già illustrati fino ad ora.

mentre  $\langle a | \sum_g \text{Tr} \left[ |a\rangle\langle a | \mathcal{D}(g) \right] |a\rangle\langle a | \mathcal{D}^\dagger(g) |a\rangle = \sum_g |\langle a | \mathcal{D}(g) |a\rangle|^2 = \tilde{k}$ . Invece, per  $|a\rangle$  ortogonale a  $|b\rangle$ ,

$$\sum_g \text{Tr} \left[ |a\rangle\langle a | \mathcal{D}(g) \right] |b\rangle\langle b | \mathcal{D}^\dagger(g) = 0. \quad (5.40)$$

Per dimostrare quest'ultima uguaglianza è sufficiente mostrare che

$$\langle u | \sum_g \text{Tr} \left[ |a\rangle\langle a | \mathcal{D}(g) \right] |b\rangle\langle b | \mathcal{D}^\dagger(g) |v\rangle = 0, \quad \forall |u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{H}. \quad (5.41)$$

Per comodità (e senza perdita di generalità), sceglieremo  $|u\rangle, |v\rangle$  facenti parte di un sistema ortonormale completo a cui appartengono anche  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$ . Se  $|u\rangle$  fosse ortogonale a  $|b\rangle$ , allora il prodotto scalare  $\langle u | b \rangle$  annullerebbe il primo membro della (5.41). Per  $|u\rangle = |b\rangle$  si ottiene invece

$$\langle b | \sum_g \text{Tr} \left[ |a\rangle\langle a | \mathcal{D}(g) \right] |b\rangle\langle b | \mathcal{D}^\dagger(g) |v\rangle = \langle b | \sum_g \text{Tr} \left[ |b\rangle\langle b | \mathcal{D}^\dagger(g) \right] \mathcal{D}(g) |a\rangle\langle a | v \rangle,$$

che è sempre nullo, a meno che  $|v\rangle = |a\rangle$ . L'unico caso rimasto, cioè quello di  $|u\rangle = |b\rangle$  e  $|v\rangle = |a\rangle$ , si esclude ricorrendo al lemma 5.4.1:

$$\begin{aligned} \langle b | \sum_g \text{Tr} \left[ |a\rangle\langle a | \mathcal{D}(g) \right] |b\rangle\langle b | \mathcal{D}^\dagger(g) |a\rangle &= \sum_g \langle a | \mathcal{D}(g) |a\rangle \langle b | \mathcal{D}^\dagger(g) |a\rangle = \\ &= \langle b | \sum_g \mathcal{D}^\dagger(g) |a\rangle \langle a | \mathcal{D}(g) |a\rangle = \tilde{k} \langle b | I |a\rangle = 0. \end{aligned}$$

La (5.39) e la (5.40) si riassumono nella

$$\sum_g \text{Tr} \left[ |a\rangle\langle a | \mathcal{D}(g) \right] |b\rangle\langle b | \mathcal{D}^\dagger(g) = \delta_{ab} \tilde{k} |a\rangle\langle a|,$$

o, equivalentemente secondo la (5.38), nella

$$\sum_g \text{Tr} \left[ |b\rangle\langle b | \mathcal{D}^\dagger(g) \right] \mathcal{D}(g) |a\rangle\langle a| = \delta_{ab} \tilde{k} |a\rangle\langle a|. \quad (5.42)$$

Per le ipotesi  $O \in \tau_c(\mathcal{H})$  e  $O = O^\dagger$ , indicando con  $o_i$  gli autovalori di  $O$ , grazie alla (5.42) avremo:

$$\begin{aligned} \sum_g \operatorname{Tr} \left[ O \mathcal{D}^\dagger(g) \right] \mathcal{D}^\dagger(g) O &= \sum_{i,j} o_i o_j \sum_g \operatorname{Tr} \left[ |o_i\rangle \langle o_i| \mathcal{D}^\dagger(g) \right] \mathcal{D}(g) |o_j\rangle \langle o_j| = \\ &= \sum_{i,j} o_i o_j \tilde{k} \delta_{ij} |o_i\rangle \langle o_i| = \tilde{k} O^2. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Applicando  $O^{-1}$  a destra del primo e dell'ultimo membro di (5.43), si ottiene  $\sum_g \operatorname{Tr} \left[ O \mathcal{D}^\dagger(g) \right] \mathcal{D}(g) = \tilde{k} O$ , che sostituita in (5.37) dà

$$O \sum_g \operatorname{Tr} \left[ A \mathcal{D}(g) \right] \mathcal{D}^\dagger(g) = \tilde{k} O A. \quad (5.44)$$

Moltiplicando a sinistra entrambi i membri di (5.44) per  $O^{-1}$  si ricava finalmente la tesi.

Le ipotesi del lemma 5.4.1 e del teorema 5.4.2 sono manifestamente soddisfatte da un gruppo finito con rappresentazione su di uno spazio  $\mathcal{H}$  di dimensione finita, di conseguenza gli asserti 5.2.1 e 5.2.2 risultano come casi particolari di 5.4.1 e 5.4.2 rispettivamente.

Esaminando la dimostrazione del teorema ci si accorge che nulla cambierebbe se al posto di  $A \in \tau_c(\mathcal{H})$  si ponesse la condizione meno restrittiva che  $A$  appartenga allo spazio degli operatori di Hilbert–Schmidt  $\sigma_c(\mathcal{H})$ <sup>31</sup>. Con il prodotto scalare (5.17)  $\sigma_c(\mathcal{H})$  è uno spazio di Hilbert. Allora, la

---

<sup>31</sup>A rigore la convergenza di  $\sum_g |\operatorname{Tr}[A \mathcal{D}(g)]|^2$  va verificata in altro modo, ma per semplicità non ci soffermeremo su questo punto.

(5.35), scambiando  $\mathcal{D}(g)$  con  $\mathcal{D}^\dagger(g)$  e definendo  $\mathcal{P}(g) = \tilde{k}^{-\frac{1}{2}} \mathcal{D}(g)$ , può essere formalmente scritta come

$$A = \sum_g \langle \mathcal{P}(g), A \rangle_o \mathcal{P}(g). \quad (5.45)$$

La (5.45) è di facile interpretazione: I vettori di  $\sigma_c(\mathcal{H})$  possono essere sviluppati in termini di una completezza, ricorrendo ad elementi  $\mathcal{P}(g)$  non appartenenti a  $\sigma_c(\mathcal{H})$  ma che stanno in un insieme più ampio, esattamente come avviene per lo sviluppo di un vettore di uno spazio di Hilbert in termini di vettori impropri.

Il passaggio dai gruppi discreti a quelli di Lie non compatti si effettua con la sostituzione  $\sum_g \rightarrow \int d\mu(g)$  <sup>32</sup>. Tuttavia, a differenza del caso dei gruppi compatti, i gruppi non compatti hanno la misura<sup>33</sup> invariante a destra  $d\mu_R(g)$  non necessariamente coincidente con quella invariante a sinistra  $d\mu_L(g)$ . Nonostante valgano ancora gli sviluppi del tipo (5.33), separatamente per  $d\mu_R(g)$  e  $d\mu_L(g)$ , l'analogo del lemma 5.4.1 può essere dimostrato con i metodi utilizzati per il caso discreto, solo se  $d\mu_R(g) = d\mu_L(g)$  <sup>34</sup>. Per

---

<sup>32</sup>Le parti delle dimostrazioni in cui bisogna scambiare due integrali, oppure una serie con un integrale, possono essere svolte comodamente utilizzando i teoremi sull'integrale di Lebesgue.

<sup>33</sup>Il termine misura, per gruppi non compatti, è utilizzato in senso improprio, in quanto  $\int d\mu(g)$  non è convergente.

<sup>34</sup>Non si vuole escludere del tutto la possibilità di estendere la formula tomografica ai gruppi con misure invariante destra e sinistra diverse, piuttosto, si vuole dire che se si volesse dimostrare tale possibilità bisognerebbe seguire tutt'altro metodo.

cui, nel caso continuo, ammetteremo la validità del lemma e del teorema della tomografia per gruppi di Lie, compatti e non compatti, con  $d\mu_R(g) = d\mu_L(g)$ .

## 5.5 Estensione centrale del gruppo delle traslazioni nel piano

La formula (1.8) della tomografia omodina si ottiene come caso particolare del teorema 5.4.2 (con l'integrale al posto della serie) scegliendo come gruppo astratto  $\mathcal{G}$  l'estensione centrale del gruppo delle traslazioni nel piano  $x-y$ <sup>35</sup> e come sua rappresentazione quella fornita dagli operatori di displacement  $D(\alpha) \equiv D(x + iy)$ . Per potere applicare la (5.35), bisogna prima verificare che la rappresentazione  $D$  soddisfi alle ipotesi del teorema. Innanzitutto, osserviamo che  $D$  costituisce una rappresentazione proiettiva di  $\mathcal{G}$ , in virtù della  $D(\alpha)D(\beta) = D(\alpha + \beta)e^{i\Im(\alpha\beta^*)}$ , che può essere banalmente verificata utilizzando l'espressione esplicita degli operatori  $D$ . La rappresentazione  $D$  è inoltre unitaria ed irriducibile<sup>36</sup>, con  $d\mu_R(x, y) = d\mu_L(x, y) = dx dy \equiv d^2\alpha$  [17]. La costante  $\tilde{k}$  si valuta, ad esempio, con lo stato di vuoto  $|0\rangle$ :

$$\tilde{k} = \int d^2\alpha |\langle 0|D(\alpha)|0\rangle|^2 = \int d^2\alpha e^{-|\alpha|^2} = \pi. \quad (5.46)$$

---

<sup>35</sup>L'algebra di Lie delle traslazioni nel piano ha costanti di struttura nulle, essendo i generatori infinitesimi le derivate parziali nella variabile  $x$  e nella variabile  $y$ . Ponendo il commutatore tra i generatori infinitesimi uguale ad una costante, si ottiene l'estensione centrale del gruppo delle traslazioni nel piano.

<sup>36</sup>L'unitarietà è palese, mentre l'irriducibilità verrà verificata più avanti in questo paragrafo.

La (5.46) dà esattamente lo stesso fattore che compare al denominatore della (1.8).

Le formule della tomografia quantistica di spin sono in generale generate dal gruppo  $SU(2)$ . È stato visto, tuttavia, che la considerazione di particolari sottogruppi finiti di  $SU(2)$  permette il passaggio da formule con integrali a formule con somme. Similmente, si valuterà ora la possibilità di estrarre un sottogruppo discreto dal gruppo delle traslazioni nel piano, al fine di ottenere formule discrete per la tomografia omodina. Consideriamo, dunque, il sottogruppo dell'estensione centrale delle traslazioni nel piano costituito dalle traslazioni di numeri interi, con rappresentazione con operatori della forma  $D(n+im)$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Si dimostrerà che a tale rappresentazione manca una proprietà fondamentale: l'irriducibilità. Gli operatori  $D(n+im)$  possono essere riscritti come  $e^{[i(2m\hat{x}_0 - 2n\hat{x}_{\frac{\pi}{2}})]} = e^{2im\hat{x}_0} e^{-2in\hat{x}_{\frac{\pi}{2}}} e^{i\xi}$ , dove  $\hat{x}_\phi$  è l'operatore "quadratura" definito nel capitolo 1, mentre  $\xi$  è un c-numero. Dimostrare la riducibilità dei  $D(n+im)$  equivale quindi ad individuare un sottospazio invariante per gli operatori  $e^{2im\hat{x}_0}$ ,  $e^{-2in\hat{x}_{\frac{\pi}{2}}}$ . Essendo lo spazio di Hilbert di un modo ottico isomorfo a  $L^2(\mathbb{R})$ , si può fissare l'attenzione esplicitamente su  $L^2(\mathbb{R})$ . Gli operatori  $e^{2im\hat{x}_0}$ ,  $e^{-2in\hat{x}_{\frac{\pi}{2}}}$  diventano l'operatore moltiplicativo  $e^{im'x}$  e l'operatore  $e^{n'\frac{d}{dx}}$ , con  $m' \equiv \sqrt{\frac{2}{\hbar}} m$  e  $n' \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{2}} n$ . Trascuriamo per il momento le costanti  $\sqrt{\frac{2}{\hbar}}$  e  $\sqrt{\frac{\hbar}{2}}$ , considerando cioè  $n', m' \in \mathbb{Z}$ . Da quanto seguirà sarà chiaro che la presenza di tali costanti non è in alcun modo rilevante. Sia  $V_\epsilon$  il sottospazio di  $L^2(\mathbb{R})$  delle funzioni diverse da zero solo

in intervalli di ampiezza  $\epsilon < 1$  centrati intorno ad ogni numero intero. In simboli,  $V_\epsilon = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(x) \neq 0 \text{ solo in } [l - \frac{\epsilon}{2}, l + \frac{\epsilon}{2}], \forall l \in \mathbb{Z}\}$ , con  $0 < \epsilon < 1$ . Moltiplicando qualsiasi  $f \in V_\epsilon$  per  $e^{im'x}$  si ottiene ancora un elemento di  $V_\epsilon$ . Allo stesso modo, essendo  $e^{n' \frac{d}{dx}} f(x) = f(x + n')$  per ogni  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , l'applicazione di  $e^{n' \frac{d}{dx}}$  a  $f \in V_\epsilon$  dà ancora un elemento di  $V_\epsilon$ , provando così la riducibilità di  $\{D(n + im)\}$  e, come conseguenza, anche l'impossibilità di usare la discretizzazione delle traslazioni per ottenere la tomografia omodina “discreta”<sup>37</sup>.

È stato studiato esplicitamente il caso del gruppo dell'estensione centrale delle traslazioni nel piano, da una parte per dimostrare come fosse possibile ottenere (1.8), dall'altra per illustrare con un esempio come va applicata la formula tomografica per gruppi discreti e di Lie non compatti. Il teorema 5.4.2, riferendosi ad una vasta classe di gruppi, può comunque essere utilizzato in una grande varietà di situazioni. Lo studio sistematico dei risultati cui porterebbe 5.4.2 per gruppi che non siano  $SU(2)$  o l'estensione centrale delle traslazioni nel piano non è neppure cominciato<sup>38</sup>. Oltre ad occuparsi di questi casi particolari, la continuazione ideale di questa tesi dovrebbe cercare

---

<sup>37</sup>Quest'ultima affermazione non significa che non sia possibile trovare un altro gruppo discreto utilizzabile per la tomografia omodina. Tuttavia, con il teorema di Stone-Von Neumann, ci si potrebbe rendere conto che non si hanno molte possibilità oltre a quella dei  $D(n + im)$ .

<sup>38</sup>Per la verità, un risultato è prevedibile: La tomografia del gruppo non compatto  $SU(1, 1)$  (si veda uno dei libri di teoria dei gruppi elencati nella bibliografia) permette di rappresentare la matrice densità di un sistema ottico a due modi con differenza nel numero di fotoni tra i due costante MA  $SU(1, 1)$  HA MISURE DESTRA E SINISTRA UGUALI?

di estendere la teoria a gruppi di Lie con misure invarianti a destra e sinistra differenti ed eliminare la condizione (5.25).

# Bibliografia

- [1] LA BIBLIOGRAFIA È DA SISTEMARE
- [2] F. Natterer, *The mathematics of computerized tomography*, Wiley, 1986.
- [3] K. Vogel e H. Risken, Phys. Rev. A **40**, 2847 (1989).
- [4] G. M. D'Ariano, *Quantum estimation theory and optical detection* contenuto alle pagine 139-174 in *Quantum Optics and the Spectroscopy of Solids*, T. Hakioglu and S. Shumovsky (eds.), ©1997 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- [5] G. M. D'Ariano, *Measuring quantum states* contenuto alle pagine 175-202 in *Quantum Optics and the Spectroscopy of Solids*, T. Hakioglu and S. Shumovsky (eds.), ©1997 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- [6] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, and A. Faridani, Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993). Si veda anche D. T. Smithey, M. Beck, J. Cooper, e M. G. Raymer, Phys. Rev. A **48**, 3159 (1993).

- [7] G. M. D'Ariano, C. Macchiavello e M. G. A. Paris, *Phys. Rev. A* **50**, 4298 (1994).
- [8] G. M. D'Ariano, U. Leonhardt e H. Paul, *Phys. Rev. A* **52**, R1801 (1995).
- [9] G. M. D'Ariano, *Homodyning as universal detection in Quantum Communication and Measurement*, ed. by V. P. Belavkin, O. Hirota, e R. L. Hudson, Plenum Press (New York and London 1997)
- [10] G. M. D'Ariano, *Latest Developments in Quantum Tomography*, in *Quantum Communication and Measurement*, ed. by P. Kumar, G. M. D'Ariano and O. Hirota, Plenum Press (New York and London in press???????)
- [11] G. M. D'Ariano, M. Vasilyev and P. Kumar, *Phys. Rev. A* **58**, 636 (1998).
- [12] H. F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, Adam Hilger, Bristol-New York, 1990.
- [13] Enciclopedia del novecento, articolo di teoria dei gruppi.... METTI A POSTO QUESTA REFERENCE, CHE È SOSTANZIALMENTE L'UNICA VERAMENTE MATEMATICA.
- [14] S. Sternberg, *Group Theory and Physics*, Cambridge University Press, 1994.

- [15] J.F.Cornwell, *Group Theory in Physics*, Academic Press, CHIEDI A SEGRE L'EDIZIONE GIUSTA, È UN'OPERA IN 3 VOLUMI.
- [16] E. P. Wigner, *Group Theory and its applications to the Quantum Mechanics of atomic Spectra*, Academic Press, New York, 1959.
- [17] M. Hamermesh, *Group Theory and its Applications to Physical Problems*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1962.
- [18] M. A. Najmark and A. I. Štern, *Teoria delle rappresentazioni dei gruppi*, Editori Riuniti, Edizioni MIR, 1984.
- [19] L. Fonda and G. C. Ghirardi *Symmetry Principles in Quantum Physics*, Marcel Dekker, New York, 1970.
- [20] , Libro che ti ha prestato D'Ariano ?
- [21] C. J. Bradley..... PAG.553 Onofri...(FORSE INUTILE)
- [22] RIFERIMENTI A PAG.505 ONOFRI.
- [23] I RIFERIMENTI A PAG.507 ONOFRI, SONO ABBASTANZA IMPORTANTI PERCHÈ VIENE RICAVATA UNA FORMULA SIMILE AL MIO LEMMA 2.
- [24] TUTTI I RIFERIMENTI SULLA BCH SONO A PAG.509-510 ONOFRI.

- [25] , E. Onofri e C. Destri, *Istituzioni di fisica teorica*, La Nuova Italia Scientifica, Roma, 1996.
- [26] , CHIEDI A GIGI le coordinate del Messiah..
- [27] , CALDIROLA METTI A POSTO.
- [28] , RICHTMYER METTI A POSTO
- [29] , APPUNTI DI MECC.STAT.
- [30] E. Farquhar, *Ergodic Theory in Statistical Mechanics*, Wiley, New York, 1964.
- [31] , Tesi di Orfino...
- [32] Ci sono numerosi articoli che analizzano gli stati coerenti per diversi tipi di gruppi. Mi limito a citarne alcuni:  
 Mario Rasetti, *International Journal of Theoretical Physics*, Vol.13, No.6 (1975), pp.425-430 A. M. Perelomov, *Commun.math.Phys* 26,222-236 (1972). G. M. D'Ariano,A. Cavalli,L. Michel, *Ann.Inst. Henry Poincarè*, Vol.44, No.2, 1976, pp.173-193.
- [33] R. G. Newton and B.-L. Young, 1968 *Ann.Phys. (N. Y.)*, **49**, 393.
- [34] DEVI METTERE TUTTI GLI ARTICOLI SULLA RICOSTRUZIONE DELLO STATO DI SPIN CHE HAI ANALIZZATO A SUO TEMPO CON LORENZO.

[35] DEVI CONTROLLARE ED EVENTUALMENTE METTERE TUTTI GLI ARTICOLI PERTINENTI CHE HAI PER LE MANI...